ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Τόμος 3ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
• Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κωνσταντίνος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
• Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Θωμαΐδης Ιωάννης
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος
Μέτης Στέφανος, Μπρουχούτας Κων/νος
Πολύζος Γεώργιος

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ
ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

Αδαμόπουλος Λεωνίδας
• Επίτιμος Σύμβουλος του Π.Ι.

Δακτυλογράφηση: Γαρδέρη Ρόζα
Σχήματα: Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

**Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής**

Β΄ ΜΕΡΟΣ
Τόμος 3ος

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης
Μέτης Στέφανος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης
Μπρουχούτας Κων/νος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης
Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Πολύζος Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

**Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια
του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα
του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου**

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Αρχική συνάρτηση

Πολλές φορές στην πράξη παρουσιάζονται προβλήματα, που η λύση τους απαιτεί πορεία αντίστροφη της παραγώγισης. Τέτοια προβλήματα είναι για παράδειγμα τα παρακάτω:

— Η εύρεση της θέσης $S(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστή η ταχύτητά του $υ(t)$ που, όπως γνωρίζουμε, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$.

— Η εύρεση της ταχύτητας $υ(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστή η επιτάχυνσή του $γ(t)$ που, όπως γνωρίζουμε, είναι η παράγωγος της συνάρτησης $υ = υ(t)$.

— Η εύρεση του πληθυσμού $N(t)$ μιας κοινωνίας βακτηριδίων τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστός ο ρυθμός αύξησης $N'(t)$ του πληθυσμού.

Το κοινό χαρακτηριστικό των προβλημάτων αυτών είναι ότι, δίνεται μια συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μια άλλη συνάρτηση F για την οποία να ισχύει $F'(x) = f(x)$ σε ένα διάστημα $Δ$. Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ**[1] ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $F(x) = x^3$ είναι μια παράγουσα της $f(x) = 3x^2$ στο $\mathbb{R}$, αφού $(x^3)' = 3x^2$. Παρατηρούμε ότι και όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = x^3 + c = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο $\mathbb{R}$, αφού $(x^3 + c)' = 3x^2$. Γενικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \; c \in \mathbb{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα $c \in \mathbb{R}$ της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

---

[1] Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

● Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x), \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$

● Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε

$$G'(x)=F'(x), \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x)=F(x)+c, \text{ για κάθε } x\in\Delta. \blacksquare$$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ**, συμβολίζεται $\int f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα εφ του x ντε x". Δηλαδή,

$$\int f(x)dx=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R},$$

όπου F μια παράγουσα της f στο Δ.

Για παράδειγμα,

$$\int \text{συν}x\,dx=\text{ημ}x+c, \text{ αφού } (\text{ημ}x)'=\text{συν}x.$$

Από τον τρόπο που ορίστηκε το αόριστο ολοκλήρωμα προκύπτει ότι:

> Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει
>
> $$\int f'(x)dx=f(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

Η διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος είναι αντίστροφη πορεία της παραγώγισης και λέγεται **ολοκλήρωση.** Η σταθερά c λέγεται **σταθερά ολοκλήρωσης.**
Από τον πίνακα των παραγώγων βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε τον παρακάτω πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων.
Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ			
1.	$\int 0dx = c$	6.	$\int ημx dx = -συνx + c$
2.	$\int 1dx = x + c$	7.	$\int \frac{1}{συν^2 x} dx = εφx + c$
3.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	8.	$\int \frac{1}{ημ^2 x} dx = -σφx + c$
4.	$\int x^α dx = \frac{x^{α+1}}{α+1} + c \quad α \neq -1$	9.	$\int e^x dx = e^x + c$
5.	$\int συνx dx = ημx + c$	10.	$\int α^x dx = \frac{α^x}{\ln α} + c$

Συνέπεια του ορισμού του αόριστου ολοκληρώματος και των κανόνων παραγώγισης είναι οι εξής δύο ιδιότητες:

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε

- $\int \lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$
- $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους έχουμε για παράδειγμα:

$$\int 4x^2dx = 4\int x^2dx = 4\frac{x^3}{3} + c$$

$$\begin{aligned}\int (3\eta\mu x - 2e^x)dx &= \int 3\eta\mu x dx - \int 2e^x dx = \\ &= 3\int \eta\mu x dx - 2\int e^x dx = \\ &= -3\sigma\upsilon\nu x - 2e^x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx &= \int \frac{3x}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \\ &= 3\int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \\ &= 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c.\end{aligned}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί συνάρτηση f τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο Α(2, 3) και να ισχύει $f'(x)=2x-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $f'(x)=2x-1$, έχουμε διαδοχικά:

$$\int f'(x)dx=\int(2x-1)dx$$

$$f(x)+c_1=x^2-x+c_2,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

$$f(x)=x^2-x+c_2-c_1,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

$$f(x)=x^2-x+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Για να διέρχεται η f από το σημείο Α(2, 3) πρέπει και αρκεί $f(2)=3$ ή, ισοδύναμα, $2^2-2+c=3$, δηλαδή $c=1$.
Επομένως, $f(x)=x^2-x+1$.

2. Η είσπραξη Ε(x), από την πώληση x μονάδων ενός προϊόντος $(0\le x\le 100)$ μιας βιομηχανίας, μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(x)=100-x$ (σε χιλιάδες ευρώ ανά μονάδα προϊόντος), ενώ ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής είναι σταθερός και ισούται με 2 (σε χιλιάδες ευρώ ανά μονάδα προϊόντος). Να βρεθεί το κέρδος της βιομηχανίας από την παραγωγή 100 μονάδων προϊόντος, υποθέτοντας ότι το κέρδος είναι μηδέν όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα.

ΛΥΣΗ

Αν P(x) είναι το κέρδος και K(x) είναι το κόστος παραγωγής για x μονάδες προϊόντος, τότε

$$P(x) = E(x) - K(x),$$

οπότε

$$P'(x) = E'(x) - K'(x) = 100 - x - 2 = 98 - x.$$

Δηλαδή

$$P'(x) = 98 - x,$$

οπότε

$$\int P'(x)dx = \int (98 - x)dx$$

και άρα

$$P(x) = 98x - \frac{x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα, το κέρδος είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει $P(0) = 0$,οπότε $c = 0$.
Επομένως,

$$P(x) = 98x - \frac{x^2}{2}.$$

Άρα, το κέρδος από 100 μονάδες προϊόντος είναι

$$P(100) = 98 \cdot 100 - \frac{100^2}{2} = 9800 - 5000 = 4800$$

(σε χιλιάδες ευρώ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int (x^3+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx$ ii) $\int \frac{x^2+x+1}{x}dx$

iii) $\int 3x\sqrt{x}dx$ iv) $\int \frac{x^3+8}{x+2}dx$

v) $\int \left(e^x-\frac{3}{x}+\sigma\upsilon\nu 2x\right)dx$ vi) $\int \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)dx$

vii) $\int \frac{x+3}{x+2}dx.$

2. Να βρείτε τη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ και } f(9)=1.$$

3. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)=3$, $f'(1)=6$ και $f(0)=4$.

4. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)=12x^2+2$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της Α(1, 1) έχει κλίση 3.

5. Ο πληθυσμός $N(t)$, σε εκατομμύρια, μιας κοινωνίας βακτηριδίων, αυξάνεται με ρυθμό $N'(t)=\frac{1}{20}e^{\frac{t}{20}}$ ανά λεπτό. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού στα πρώτα 60 λεπτά.

6. Μια βιομηχανία έχει διαπιστώσει ότι για εβδομαδιαία παραγωγή x εξαρτημάτων έχει οριακό κόστος x^2+5x (ευρώ ανά μονάδα προϊόντος). Να βρείτε τη συνάρτηση κόστους της εβδομαδιαίας παραγωγής, αν είναι γνωστό ότι τα σταθερά εβδομαδιαία έξοδα της βιομηχανίας, όταν δεν παράγει κανένα εξάρτημα, είναι 100 (ευρώ).

7. Μια νέα γεώτρηση εξώρυξης πετρελαίου έχει ρυθμό άντλησης που δίνεται από τον τύπο $R'(t)=20+10t-\frac{3}{4}t^2$, όπου $R(t)$ είναι ο αριθμός, σε χιλιάδες, των βαρελιών που αντλήθηκαν στους t πρώτους μήνες λειτουργίας της. Να βρείτε πόσα βαρέλια θα έχουν αντληθεί τους 8 πρώτους μήνες λειτουργίας της.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η θερμοκρασία Τ ενός σώματος, που περιβάλλεται από ένα ψυκτικό υγρό, ελαττώνεται με ρυθμό $-\kappa\alpha e^{-\kappa t}$, όπου α, κ είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος. Η αρχική θερμοκρασία $T(0)$ του σώματος

είναι $T_0 + \alpha$, όπου T_0 η θερμοκρασία του υγρού η οποία με κατάλληλο μηχάνημα διατηρείται σταθερή. Να βρείτε τη θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t.

2. **Ένας βιομήχανος, ο οποίος επενδύει x χιλιάδες ευρώ στη βελτίωση της παραγωγής του εργοστασίου του, αναμένει να έχει κέρδος P(x) χιλιάδες ευρώ από αυτή την επένδυση.**
   Μια ανάλυση της παραγωγής έδειξε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους P(x), που οφείλεται στην επένδυση αυτή, δίνεται από τον τύπο
   $P'(x) = 5{,}8e^{-\frac{x}{2000}}$. Να βρείτε το συνολικό κέρδος που οφείλεται σε αύξηση της επένδυσης από 4.000.000 ευρώ σε 6.000.000 ευρώ.

3. **Από την πώληση ενός νέου προϊόντος μιας εταιρείας διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους K(t) δίνεται από τον τύπο $K'(t) = 800 - 0{,}6t$ (σε ευρώ την ημέρα), ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης E(t) στο τέλος των t ημερών δίνεται από τον τύπο $E'(t) = 1000 + 0{,}3t$ (σε ευρώ την ημέρα). Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την τρίτη έως και την έκτη ημέρα παραγωγής.**

4. **Έστω f, g δύο συναρτήσεις με $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1) + 1$ και $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.**
   Να αποδείξετε ότι:

   i) $f(x) = g(x) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν η συνάρτηση g έχει δύο ρίζες α, β με $\alpha < 0 < \beta$, τότε η συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον, ρίζα στο (α, β).

3.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Ο πίνακας των αόριστων ολοκληρωμάτων, που δώσαμε παραπάνω, δεν είναι αρκετός για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μίας οποιασδήποτε συνάρτησης, όπως π.χ. τα ολοκληρώματα $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ και $\int xe^x dx$.

Σε τέτοιες περιπτώσεις ο υπολογισμός γίνεται απλούστερος με τη βοήθεια των παρακάτω μεθόδων ολοκλήρωσης.

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

που είναι συνέπεια του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σε ένα διάστημα Δ.

Πράγματι, για κάθε $x \in \Delta$, έχουμε

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

οπότε

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Επομένως

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + c - \int f'(x)g(x)dx. \qquad (1)$$

Επειδή το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της (1) περιέχει μια σταθερά ολοκλήρωσης, το c μπορεί να παραλειφθεί, οπότε έχουμε τον παραπάνω τύπο. ■

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα του β΄ μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$\int xe^x dx$. Έχουμε:

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

Αν, τώρα, δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, αλλάζοντας τους ρόλους των x και e^x, βρίσκουμε

$$\int xe^x dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx.$$

Το τελευταίο, όμως, ολοκλήρωμα είναι πιο σύνθετο από το αρχικό.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\int x^2 e^x dx$ ii) $\int x\eta\mu 2x dx$

iii) $\int (4x^3+1)\ln x dx$ iv) $\int e^x \eta\mu 2x dx$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx =$$

$$= x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - \int 2x(e^x)' dx =$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx =$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int P(x) e^{\alpha x} dx}$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

ii) Έχουμε

$$\int x\eta\mu 2x dx = \frac{1}{2}\int x(-\sigma\upsilon\nu 2x)' dx = -\frac{1}{2}x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int P(x)\eta\mu(\alpha x)dx,} \qquad \boxed{\int P(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx}$$

όπου P(x) πολυώνυμο του x και $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

iii) Έχουμε

$$\int (4x^3+1)\ln x dx = \int (x^4+x)'\ln x dx =$$

$$= (x^4+x)\ln x - \int (x^4+x)\frac{1}{x}dx =$$

$$= (x^4+x)\ln x - \int (x^3+1)dx =$$

$$= (x^4+x)\ln x - \frac{x^4}{4} - x + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int P(x)\ln(\alpha x)dx,}$$

όπου P(x) πολυώνυμο του x και $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

iv) Θέτουμε $I = \int e^x \eta\mu(2x)dx$, οπότε έχουμε

$$I = \int (e^x)'\eta\mu(2x)dx = e^x\eta\mu(2x) - 2\int e^x\sigma\upsilon\nu(2x)dx =$$

$$= e^x\eta\mu(2x) - 2\int (e^x)'\sigma\upsilon\nu(2x)dx =$$

$$= e^x ημ(2x) - 2e^x συν(2x) - 4\int e^x ημ2x dx =$$

$$= e^x ημ(2x) - 2e^x συν(2x) - 4I.$$

Επομένως,

$$5I = e^x ημ(2x) - 2e^x συν(2x) + c_1$$

οπότε

$$I = \frac{1}{5} e^x ημ(2x) - \frac{2}{5} e^x συν(2x) + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int e^{αx} ημ(βx) dx,} \qquad \boxed{\int e^{αx} συν(βx) dx}$$

όπου $α, β \in \mathbb{R}^*$.

2. **Ο πληθυσμός $P(t)$, $0 \le t \le 20$, μιας πόλης, που προέκυψε από συγχώνευση 10 κοινοτήτων, αυξάνεται με ρυθμό (σε άτομα ανά έτος) που δίνεται από τον τύπο $P'(t) = te^{\frac{t}{10}}$, $0 \le t \le 20$, όπου t είναι ο αριθμός των ετών μετά τη συγχώνευση. Να βρεθεί ο πληθυσμός $P(t)$ της πόλης t χρόνια μετά τη συγχώνευση, αν γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός ήταν 10000 κάτοικοι κατά τη στιγμή της συγχώνευσης.**

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\int P'(t)dt = \int te^{\frac{t}{10}}dt =$$

$$= 10\int (e^{\frac{t}{10}})'tdt =$$

$$= 10e^{\frac{t}{10}} \cdot t - 10\int e^{\frac{t}{10}}dt =$$

$$= 10te^{\frac{t}{10}} - 100e^{\frac{t}{10}} + c,$$

οπότε

$$P(t) = 10te^{\frac{t}{10}} - 100e^{\frac{t}{10}} + c, \text{ για κάποιο } c \in \mathbb{R}.$$

Όταν $t = 0$, ο πληθυσμός είναι 10000. Συνεπώς:

$$P(0) = 10000 \Leftrightarrow 10e^0 \cdot 0 - 100e^0 + c = 10000 \Leftrightarrow c = 10100.$$

Άρα, ο πληθυσμός της πόλης, t χρόνια μετά τη συγχώνευση, είναι

$$P(t) = 10te^{\frac{t}{10}} - 100e^{\frac{t}{10}} + 10100.$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$.
Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,$$
όπου $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα $\int f(u)du$ του δευτέρου μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

Η απόδειξη του τύπου αυτού στηρίζεται στο γνωστό κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης.
Πράγματι, αν F είναι μια παράγουσα της f, τότε

$$F'(u) = f(u), \qquad (1)$$

οπότε

$$F'(g(x)) = f(g(x))$$

και άρα

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int F'(g(x))g'(x)dx =$$

$$= \int (F(g(x)))'dx = \quad \text{(αφού } (F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x)\text{)}$$

$$= F(g(x)) + c =$$

$$= F(u) + c = \quad \text{(όπου } u = g(x)\text{)}$$

$$= \int f(u)du \quad \text{(λόγω της (1))} \ \blacksquare$$

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$. Θέτουμε $u = x^2 + 1$ και $du = (x^2+1)'dx = = 2xdx$, οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{u}du =$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}du =$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2 + 1)^3} + c.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ ii) $\displaystyle\int εφx dx.$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $u = 1 + e^x$, οπότε $du = (1 + e^x)'dx = e^x dx$. Επομένως,

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{1+e^x} + c$$

ii) Έχουμε $\displaystyle\int εφx dx = \int \frac{ημx}{συνx}dx$. Επομένως, αν θέσουμε $u = συνx$, οπότε $du = (συνx)'dx = -ημx dx$, έχουμε:

$$\int εφx dx = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + c = -\ln|συνx| + c.$$

2. **Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα**

i) $\int \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$ ii) $\int \frac{1}{1-2x}dx$ iii) $\int x(x^2-1)^{99}dx.$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $u=2x+\frac{\pi}{6}$, οπότε $du=\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)'dx=2dx.$

Επομένως,

$$\int \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx=\frac{1}{2}\int \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2dx=\frac{1}{2}\int \eta\mu u du=$$

$$=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu u+c=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+c.$$

ii) Θέτουμε $u=1-2x$, οπότε $du=(1-2x)'dx=-2dx.$

Επομένως,

$$\int \frac{1}{1-2x}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du=-\frac{1}{2}\ln|u|+c=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+c.$$

iii) Θέτουμε $u=x^2-1$, οπότε $du=2xdx$. Άρα

$$\int x(x^2-1)^{99}dx=\frac{1}{2}\int u^{99}du=\frac{1}{2}\frac{u^{100}}{100}+c=\frac{1}{200}(x^2-1)^{100}+c.$$

3. **Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα**

i) $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$ ii) $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx.$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{2,3\}$ και γράφεται

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}.$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς Α, Β έτσι, ώστε να ισχύει

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{2,3\}.$$

Με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε τελικά:
$(A+B-2)x=3A+2B+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2,3\}$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2,3\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} A+B-2=0 \\ 3A+2B+1=0 \end{cases} \text{ ή, ισοδύναμα, } \begin{cases} A=-5 \\ B=7 \end{cases}.$$

Επομένως,

$$\int\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3}\right)dx=\int\frac{-5}{x-2}dx+\int\frac{7}{x-3}dx=$$

$$=-5\ln|x-2|+7\ln|x-3|+c.$$

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int \frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx, \text{ με } \beta^2-4\alpha\gamma>0$$

ii) Αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου x^2-3x+7 με το πολυώνυμο x^2-5x+6, βρίσκουμε ότι

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}=1+\frac{2x+1}{x^2-5x+6}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx=\int 1dx+\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=$$

$$=x-5\ln|x-2|+7\ln|x-3|+c$$ (λόγω του (i)).

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{P(x)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx,$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 και $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int x^2 e^{-x} dx$ ii) $\int (3x^2-2x+1)e^{2x} dx$

iii) $\int x^3 \ln x dx$ iv) $\int 2x^2 ημ2x dx$

v) $\int 4x συν2x dx$ vi) $\int \ln x dx$,

vii) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ viii) $\int e^x συν2x dx$ ix) $\int e^x ημx dx$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int ημ3x dx$ ii) $\int (4x^2-16x+7)^3 (x-2) dx$

iii) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^4} dx$ iv) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx$

v) $\int x\sqrt{x+1} dx$.

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int e^x ημe^x dx$ ii) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ iii) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

iv) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)} dx$ v) $\int \frac{ημ\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ ii) $\int \varepsilon\varphi x\cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x)dx$

iii) $\int \sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\eta\mu x}dx$.

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}}\cdot\frac{1}{x^4}dx$ ii) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

iii) $\int x\ln(x^2+1)dx$.

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int x^2\ln x^2 dx$ ii) $\int (\ln t)^2 dt$ iii) $\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu e^x dx$.

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \varepsilon\varphi x dx$ και $\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

ii) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx$ και $\int \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx$

iii) $\int \eta\mu^3 x dx$ και $\int \sigma\upsilon\nu^3 x dx$.

5. Με τη βοήθεια των τύπων

$$ημ^2α = \frac{1 - συν2α}{2} \quad \text{και} \quad συν^2α = \frac{1 + συν2α}{2}$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int ημ^2 x dx$ ii) $\int συν^2 x dx$ iii) $\int ημ^2 x συν^2 x dx$

6. Με τη βοήθεια των τύπων

$$2ημασυνβ = ημ(α - β) + ημ(α + β),$$

$$2συνασυνβ = συν(α - β) + συν(α + β)$$

$$2ημαημβ = συν(α - β) - συν(α + β)$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int ημx συν2x dx$ ii) $συν3x συν5x dx$

iii) $\int ημ2x ημ4x dx$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} dx$ ii) $\int \frac{3x + 2}{x^2 - 3x + 2} dx$

iii) $\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx$ iv) $\int \frac{2}{x^2 - 1} dx$.

3.3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Γενικά

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι, όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση θέσης $y = S(t)$ ενός κινητού, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού. Πολλές φορές, όμως, είναι γνωστή η ταχύτητα $\upsilon = \upsilon(t)$ ή η επιτάχυνση $\alpha = \alpha(t)$ του κινητού και ζητείται η θέση του. Για παράδειγμα:

— Αν ένα κινητό κινείται ευθυγράμμως με σταθερή ταχύτητα c, για να προσδιορίσουμε τη θέση του $y = S(t)$, αρκεί να λύσουμε ως προς y την εξίσωση

$$y' = c. \qquad (1)$$

— Αν σε ένα σώμα μάζας m ασκείται δύναμη $F = F(t)$, τότε το σώμα κινείται με επιτάχυνση $\alpha = \alpha(t)$ η οποία, σύμφωνα με το 2ο νόμο της μηχανικής, δίνεται από τον τύπο $F = m\alpha$ ή, ισοδύναμα, $F = my''$, όπου $y = S(t)$ η συνάρτηση θέσης του σώματος. Επομένως, για να προσδιορίσουμε τη θέση $y = S(t)$ του σώματος, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$m \cdot y'' = F. \qquad (2)$$

Εξισώσεις όπως οι (1) και (2) λέγονται **διαφορικές εξισώσεις**. Γενικά,

ΟΡΙΣΜΟΣ

Διαφορική εξίσωση λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει τη μεταβλητή x, μια άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$ και κάποιες από τις παραγώγους της y', y'', ...

Για παράδειγμα, οι εξισώσεις

$$y' = 2x,\ y' = 2y,\ y'' + y = 0$$

είναι διαφορικές εξισώσεις.
Η μεγαλύτερη από τις τάξεις των παραγώγων που εμφανίζονται στην εξίσωση ονομάζεται **τάξη** της διαφορικής εξίσωσης. Έτσι οι εξισώσεις $y' = 2x$ και $y' = 2y$ είναι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, ενώ η $y''+ y = 0$ είναι δευτέρας τάξεως.
Κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ που επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση λέγεται **λύση** της εξίσωσης.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y = x^2$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = 2x$, αφού $y' = (x^2)' = 2x$.
Το σύνολο όλων των λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης λέγεται **γενική λύση** της εξίσωσης.
Για παράδειγμα, η γενική λύση της εξίσωσης $y' = 2x$ είναι η $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Συχνά ζητάμε εκείνη τη λύση $y = f(x)$ της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί μια **αρχική συνθήκη** $y_0 = f(x_0)$. Για να βρούμε τη λύση αυτή, βρίσκουμε πρώτα τη γενική λύση της εξίσωσης και με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης προσδιορίζουμε τη ζητούμενη λύση.
Για παράδειγμα, η λύση $y = f(x)$ της διαφορικής εξίσωσης $y' = 2x$, που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $f(1) = 2$, είναι η συνάρτηση $y = x^2 + 1$, αφού από τη γενική λύση $y = x^2 + c$, για $x = 1$ και $y = 2$ είναι $c = 1$.
Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με δυο ειδικές μορφές διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως:

- Τις εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές και
- Τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως.

Διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

Έχει αποδειχτεί πειραματικά, ότι ο ρυθμός μεταβολής, ως προς το χρόνο, του πληθυσμού $y = P(t)$ μιας κοινωνίας, η οποία δεν επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες, είναι ανάλογος του πληθυσμού. Δηλαδή, ισχύει

$$P'(t) = \alpha P(t),$$

όπου α θετική σταθερά.
Αν ο αρχικός πληθυσμός της κοινωνίας είναι P_0, δηλαδή $P(0) = P_0$, για να βρούμε τον πληθυσμό $P(t)$ ύστερα από χρόνο t, θα λύσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση.

Επειδή $y = P(t) > 0$, η εξίσωση γράφεται

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \alpha,$$

οπότε ολοκληρώνοντας και τα δυο μέλη της, έχουμε διαδοχικά:

$$\int \frac{P'(t)}{P(t)} dt = \int \alpha \, dt$$

$$\ln P(t) = \alpha t + c_1.$$

$$P(t) = e^{\alpha t + c_1},$$

$$P(t) = ce^{\alpha t}, \text{ με } c = e^{c_1}.$$

Επειδή $P(0) = P_0$, είναι $c = P_0$, οπότε

$$P(t) = P_0 e^{\alpha t}.$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση λέγεται διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές. Γενικά,

ΟΡΙΣΜΟΣ

Διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha(y) \cdot y' = \beta(x) \qquad (1),$$

όπου $y = f(x)$ η άγνωστη συνάρτηση, $\alpha(y)$ συνάρτηση του y και $\beta(x)$ συνάρτηση του x.

Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της ως προς x.
Έχουμε

$$\int \alpha(y)y'dx = \int \beta(x)dx.$$

Επειδή $y = f(x)$, είναι $dy = f'(x)dx = y'dx$, οπότε έχουμε

$$\int \alpha(y)dy = \int \beta(x)dx. \qquad (2)$$

Αν $A(y)$ είναι μια παράγουσα $\alpha(y)$ και $B(x)$ μια παράγουσα της $\beta(x)$, τότε η (2) γράφεται

$$A(y) = B(x) + c,\ c \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Από την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

ΣΧΟΛΙΟ

Η ισότητα (2) μας επιτρέπει να γράφουμε τη διαφορική εξίσωση (1) στην "άτυπη" μορφή της

$$\alpha(y)dy = \beta(x)dx$$

και να ολοκληρώνουμε τα μέλη της, το μεν πρώτο μέλος της ως προς y, το δε δεύτερο μέλος της ως προς x.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

i) $2y - xy' = 0, \quad x \neq 0$ και $y > 0$

ii) $y' = 2xy^2, \quad y \neq 0$

iii) $x + yy' = 0, \quad y > 0.$

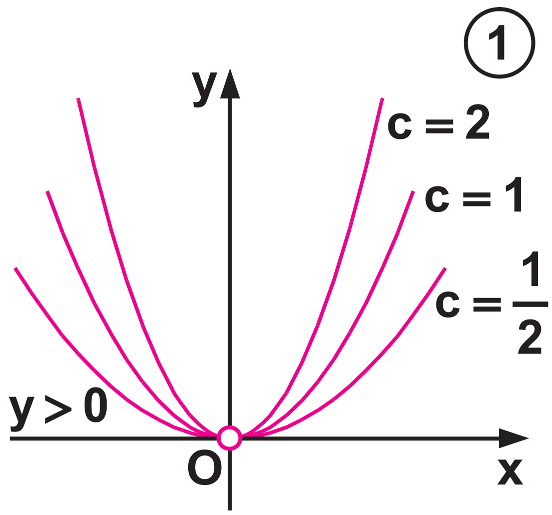
ΛΥΣΗ

i) Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x},$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{2}{x}dx.$$



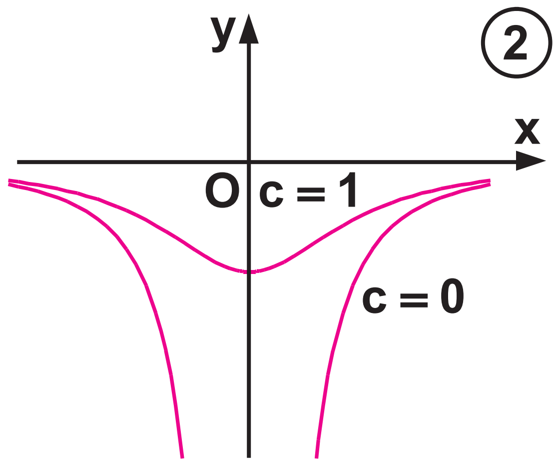
$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2}{x}dx$$

$$\ln y = 2\ln|x| + c_0 = \ln x^2 + c_0, \; c_0 \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{\ln x^2 + c_0} = e^{c_0} \cdot e^{\ln x^2} = cx^2, \; c > 0.$$

Άρα, σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ είναι $y = cx^2$, όπου $c > 0$

ii) Η εξίσωση γράφεται:



$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

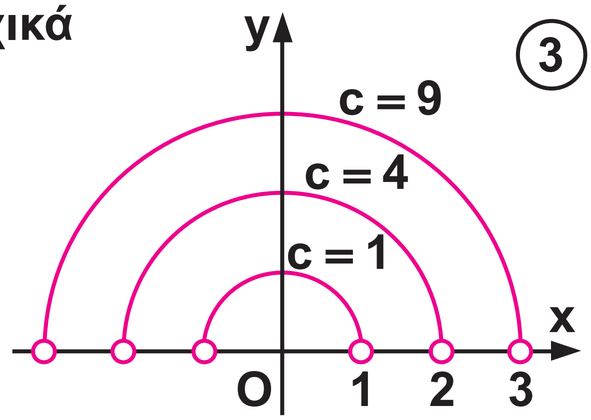
$$\frac{dy}{y^2} = 2xdx.$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

Άρα, $y = -\dfrac{1}{x^2 + c}$, όπου $c \in \mathbb{R}$ (Σχ. 2).

iii) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά



$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$ydy = -xdx$$

$$\int ydy = -\int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

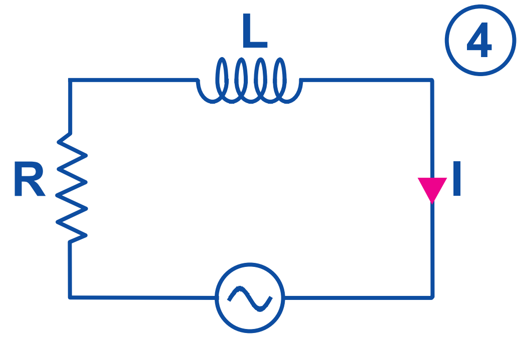
$$x^2 + y^2 = c\,,\; c > 0$$

Άρα, $y=\sqrt{c-x^2}$, όπου $c>0$ (Σχ. 3).

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι στο παρακάτω κύκλωμα ισχύει ο κανόνας του Kirchhoff.
Δηλαδή,

$$L\cdot\frac{dI(t)}{dt}+R\cdot I(t)=V(t). \qquad (1)$$



Για να προσδιορίσουμε την ένταση, I(t), του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, είναι ανάγκη να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση (1). Η εξίσωση αυτή λέγεται γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$y'+\alpha(x)y=\beta(x),$$

όπου $y=f(x)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση και $\alpha(x)$, $\beta(x)$ συναρτήσεις του x.

Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής:

— Αναζητούμε μια παράγουσα $A(x)$ της συνάρτησης $\alpha(x)$ και έπειτα

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης με $e^{A(x)}$.

Έτσι, έχουμε διαδοχικά

$$y'e^{A(x)} + \alpha(x)e^{A(x)} \cdot y = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$y'e^{A(x)} + A'(x)e^{A(x)} \cdot y = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$y'e^{A(x)} + (e^{A(x)})' \cdot y = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$(ye^{A(x)})' = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$\int (ye^{A(x)})'dx = \int \beta(x)e^{A(x)}dx$$

$$ye^{A(x)} = B(x) + c,$$

όπου $B(x)$ μια παράγουσα της $\beta(x)e^{A(x)}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = 2.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή μια παράγουσα της $\alpha(x) = 2$ είναι η $A(x) = 2x$, πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της εξίσωσης με e^{2x}. Έτσι, έχουμε διαδοχικά

$$y'e^{2x} + 2e^{2x}y = 2e^{2x}$$

$$(ye^{2x})' = (e^{2x})'$$

$$ye^{2x} = e^{2x} + c$$

$$y = 1 + ce^{-2x}, \ c \in \mathbb{R}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις:

   i) $y' = -4xy^2,\ y > 0$ ii) $y'y = x,\ y > 0$

   iii) $\dfrac{1}{xy}y' = 2$ iv) $y' = e^{-y}συνx$.

2. Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις:

   i) $y' + 2y = 3$ ii) $y' + 2y = e^{-x}$

   iii) $y' + y = 2x$ iv) $y' + 2xy = x$.

3. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = 2x^2y^2,\ y < 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $Α(0, -3)$.

4. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = 2 - 3y$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(0) = \dfrac{2}{3}$.

5. Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις:

   i) $y' + \dfrac{1}{συν^2x}y = \dfrac{1}{συν^2x}$, αν $y(0) = -3$

   ii) $(x+1)y' + y = \ln x$, αν $y(1) = 10$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος I σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{dI}{dt}+I=\eta\mu t$. Αν $I(0)=0$, να βρείτε την ένταση $I(t)$.

2. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $ye^{y^2}y'=e^{2x}$, η οποία διέρχεται από το σημείο Α(2, 2).

3. Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'-\frac{1}{x}y=x,\ x>0$.

4. Η κλίση της εφαπτομένης μιας γραμμής (C) με εξίσωση $y=y(x)$, $y>0$ στο σημείο $M(x, y)$ είναι ίση με xy. Να βρείτε την εξίσωση της (C), αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από το σημείο Α(0, 1).

5. Έστω $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$ σταθερές, με $\alpha>\lambda>0$.

   i) Να λύσετε την εξίσωση $y'+\alpha y=\beta e^{-\lambda t}$.

   ii) Αν $y=y(t)$ είναι μια λύση της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ισχύει $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=0$.

6. Έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας θ ενός σώματος, όταν αυτό βρεθεί σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας T με $\theta>T$, είναι

$$\frac{d\theta}{dt}=-k(\theta-T),\ k>0.$$

Να βρείτε τη θερμοκρασία $\theta(t)$, αν $\theta(0) = \theta_0$.

7. Ο πληθυσμός $P = P(t)$ μιας χώρας μεταναστεύει με σταθερό ρυθμό $m > 0$. Δίνεται ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού P, αν δεν υπήρχε η μετανάστευση, θα ήταν ανάλογος του P.

   i) Να δικαιολογήσετε ότι ο πληθυσμός P ικανοποιεί την εξίσωση $P' = kP - m$, $k > 0$ σταθερά.

   ii) Να βρείτε τη συνάρτηση $P = P(t)$, αν $P(0) = P_0$

   iii) Να αποδείξετε ότι:

— Αν $m < kP_0$, τότε ο πληθυσμός αυξάνεται.

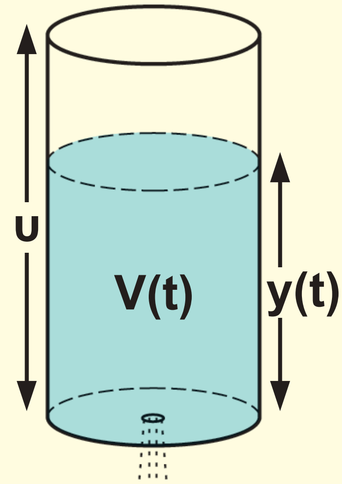
— Αν $m > kP_0$, τότε ο πληθυσμός μειώνεται.

— Αν $m = kP_0$, τότε ο πληθυσμός παραμένει σταθερός.

8. Έστω $y = y(t)$ το ύψος και $V = V(t)$ ο όγκος του νερού μιας δεξαμενής τη χρονική στιγμή t.
Η δεξαμενή αδειάζει από μια κυκλική οπή εμβαδού α που βρίσκεται στον πυθμένα της.
Σύμφωνα με το νόμο του Torricelli ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού είναι

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha\sqrt{2gy}\,,\ g = 10\ m/s^2.$$

i) Αν η δεξαμενή είναι κυλινδρική με ύψος 3,6 m, ακτίνα 1 m και η ακτίνα της οπής είναι 0,1 m, να αποδείξετε ότι το y ικανοποιεί την εξίσωση

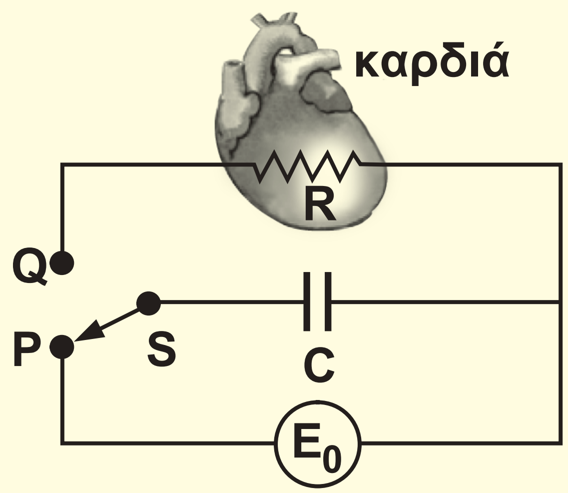


$$y' = -\frac{\sqrt{5}}{50}\sqrt{y}$$

ii) Να βρείτε το ύψος y(t), αν είναι γνωστό ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η δεξαμενή ήταν γεμάτη.

iii) Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να αδειάσει τελείως η δεξαμενή; (Δίνεται ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi r^2 υ$).

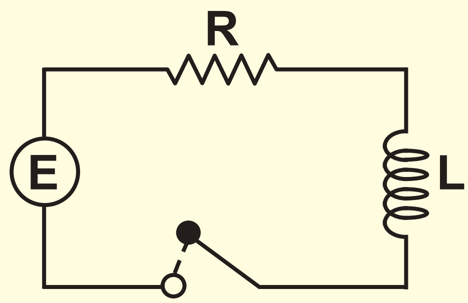
9. Ένας βηματοδότης αποτελείται από μια μπαταρία και έναν πυκνωτή, ενώ η καρδιά παίζει το ρόλο της αντίστασης, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Όταν ο διακόπτης S βρίσκεται στη θέση P, ο πυκνωτής φορτίζεται ενώ, όταν βρίσκεται στη θέση Q, ο πυκνωτής εκφορτίζεται και προκαλεί ηλεκτρικό ερέθισμα στην καρδιά. Κατά τη διάρκεια αυτή στην καρδιά εφαρμόζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη E που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E,\ t_1 < t < t_2.$$

όπου R, C σταθερές. Να βρείτε την $E(t)$, αν $E(t_1) = E_0$.



10. Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος ισχύει

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t).$$

i) Αν $R = 12\ \Omega$, $L = 4$ H, $E = 60$ V,

α) να βρείτε την ένταση $I(t)$ του ρεύματος, t sec μετά το κλείσιμο του κυκλώματος.

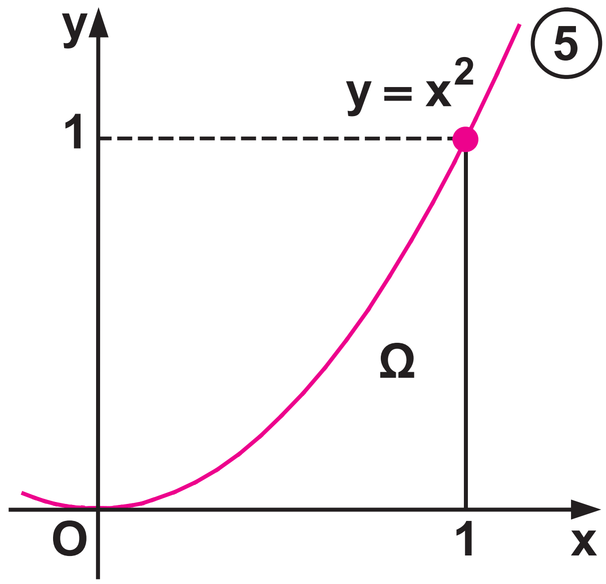
β) να βρείτε το $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$. Τι συμπεραίνετε;

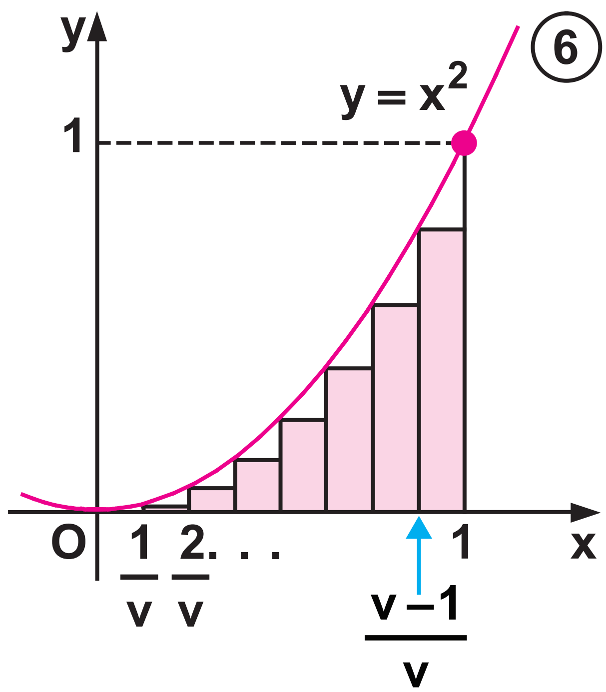
ii) Αν στο κύκλωμα αντί για μπαταρία που δίνει σταθερή ηλεκτρεγερτική δύναμη E χρησιμοποιήσουμε μια γεννήτρια που δίνει $E(t) = 60ημ3t$, να βρείτε την ένταση $I(t)$.

3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Εμβαδόν παραβολικού χωρίου

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ (Παραβολικό χωρίο Σχ. 5).





Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:
Χωρίζουμε το διάστημα [0,1] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{1}{\nu}$, με άκρα τα σημεία:

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{\nu},\ x_2=\frac{2}{\nu},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ x_{\nu-1}=\frac{\nu-1}{\nu},$$
$$x_\nu=\frac{\nu}{\nu}=1.$$

● Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. (Σχ. 6). Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_ν, των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

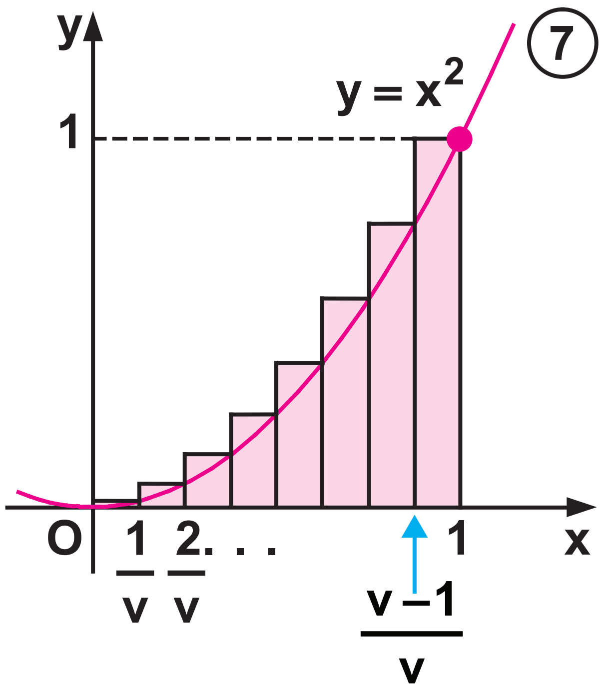
$$\varepsilon_\nu=f(0)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+\cdots+f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}=$$

$$=\frac{1}{\nu}\left[0^2\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\left(\frac{2}{\nu}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{\nu^3}[1^2+2^2+\cdots+(\nu-1)^2]=$$

$$=\frac{1}{\nu^3}\frac{(\nu-1)\cdot\nu(2\nu-1)}{6}=\frac{2\nu^2-3\nu+1}{6\nu^2}.$$

● Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7),



τότε το άθροισμα

$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού.
Είναι όμως,

$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu} =$$

$$= \frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2\right] =$$

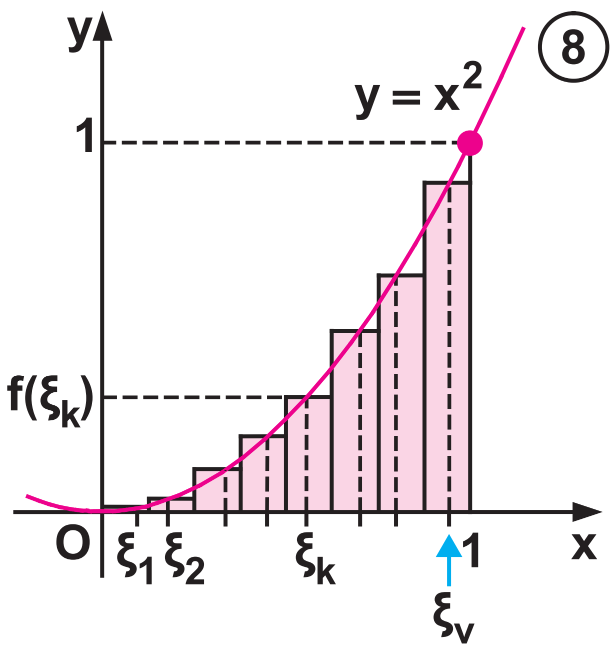
$$=\frac{1}{\nu^3}(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)=\frac{1}{\nu^3}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}=\frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}.$$

Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν Ε βρίσκεται μεταξύ των ε_ν και E_ν. Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_\nu \le E \le E_\nu$, οπότε

$\lim\limits_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu \le E \le \lim\limits_{\nu\to\infty} E_\nu$.

Επειδή $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} E_\nu = \frac{1}{3}$, έχουμε $E=\frac{1}{3}$.

● Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα $[x_{\kappa-1},\ x_\kappa]$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$ και ύψη την τιμή της συνάρτησης σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο ξ_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots, 3, \ldots, \nu$, καθενός διαστήματος, (Σχ. 8),



τότε το άθροισμα

$$S_\nu=\frac{1}{\nu}f(\xi_1)+\frac{1}{\nu}f(\xi_2)+\cdots+\frac{1}{\nu}f(\xi_\nu)$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Επειδή $f(x_{\kappa-1}) \le f(\xi_\kappa) \le f(x_\kappa)$ για $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$, θα είναι

$$\frac{1}{\nu}f(x_{\kappa-1}) \le \frac{1}{\nu}f(\xi_\kappa) \le \frac{1}{\nu}f(x_\kappa),$$

οπότε θα ισχύει

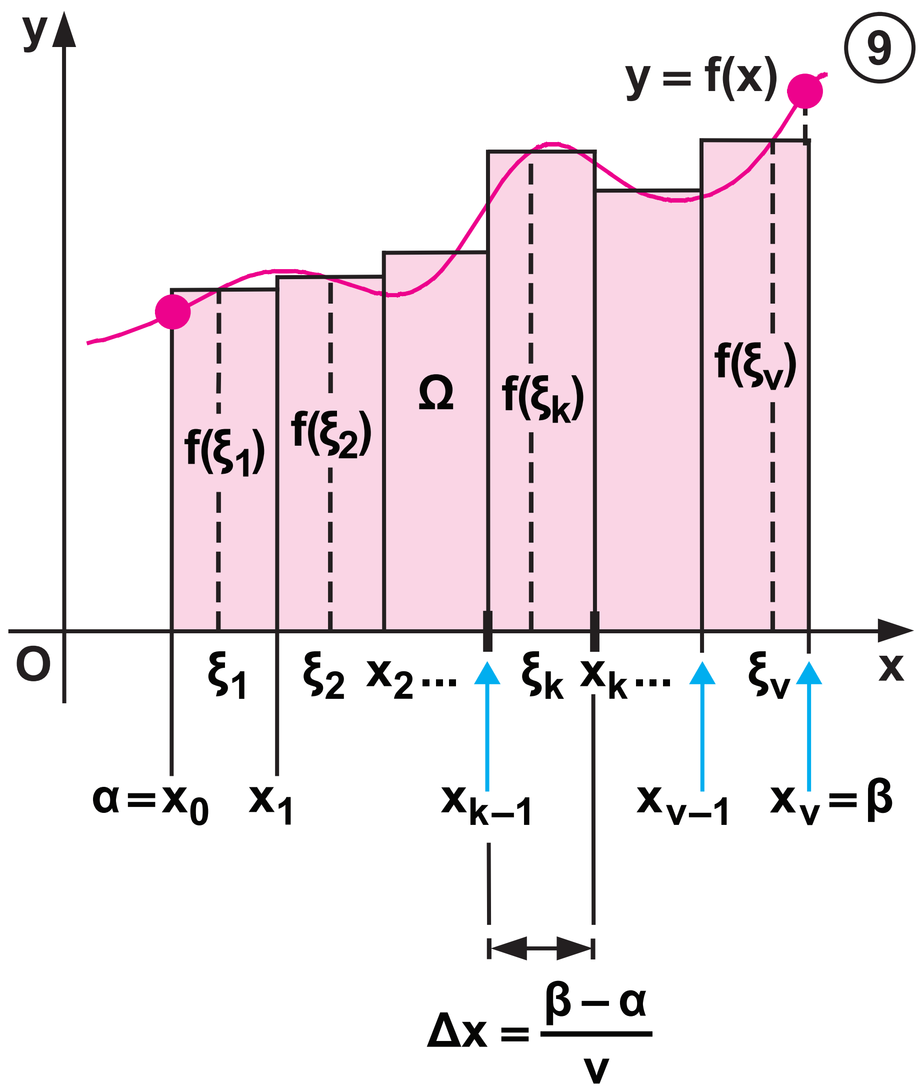
$$\varepsilon_\nu \le S_\nu \le E_\nu.$$

Είναι όμως, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty} E_\nu = E$. Άρα θα ισχύει $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu = E$.

Ορισμός εμβαδού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω (Σχ. 9) εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.



Δηλαδή:

● Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$.

● Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{κ-1}, x_κ]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο $ξ_κ$ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση $Δx$ και ύψη τα $f(ξ_κ)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

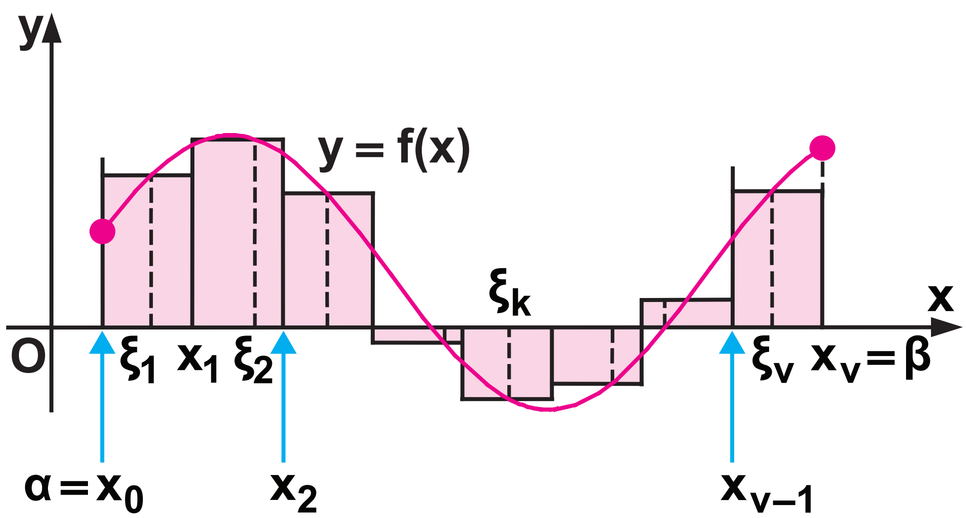
$$S_ν = f(ξ_1)Δx + f(ξ_2)Δx + \ldots + f(ξ_ν)Δx = [f(ξ_1) + \ldots + f(ξ_ν)]Δx.$$

● Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{ν\to+\infty} S_ν$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{ν\to+\infty} S_ν$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων $ξ_κ$. Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με **Ε(Ω)**. Είναι φανερό ότι $Ε(Ω) \geq 0$.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α, β]. Με τα σημεία $α = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_ν = β$ χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $Δx = \dfrac{β-α}{ν}$.



(10)

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $ξ_κ \in [x_{κ-1}, x_κ]$, για κάθε $κ \in \{1,2,\ldots,ν\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \dots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x^{(1)}.$$

Αποδεικνύεται ότι,

"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\beta^\alpha f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα).

Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου

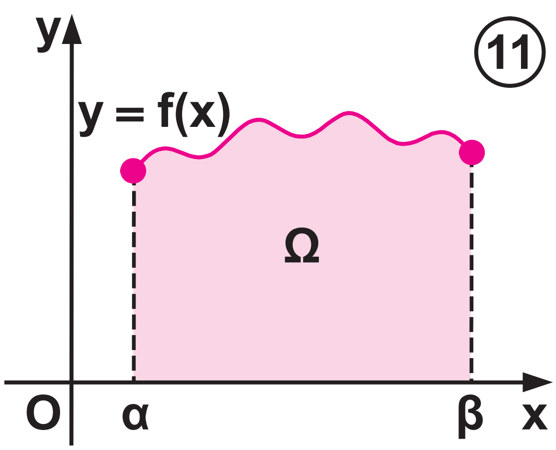
---

(1) Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN.

του 2ου κεφαλαίου. Στην έκφραση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$, συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων. Είναι, όμως, χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, ως εξής:

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:
Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 11).



Δηλαδή,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E(\Omega).$$

Επομένως,

$$\boxed{\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$, για οποιοδήποτε $c \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αν $\alpha = \beta$, τότε $\int_{\alpha}^{\alpha} c dx = 0 = c(\alpha - \alpha) = c(\beta - \alpha)$.

ii) Αν $\alpha < \beta$, τότε, επειδή η $f(x) = c$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} c dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} [(f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu))\Delta x] =$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} \frac{\beta - \alpha}{\nu}[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_\nu)] =$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} \left(\frac{\beta - \alpha}{\nu}(c + c + \cdots + c) \right) =$$

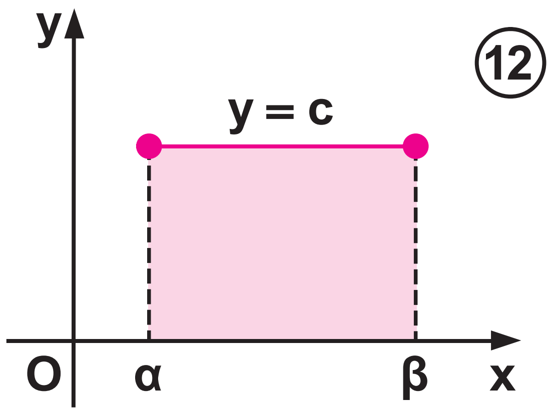
$$= \lim_{\nu \to \infty} \left(\frac{\beta - \alpha}{\nu} \cdot \nu c \right) = c(\beta - \alpha)$$

iii) Αν α > β, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} c\,dx = -c(\alpha-\beta) = c(\beta-\alpha).$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση β – α και ύψος c (Σχ. 12).



Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+g(x)]\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

και γενικά

- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x)+\mu g(x)]\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Για παράδειγμα, αν $\int_{0}^{3} f(x)dx = 3$ και $\int_{0}^{4} f(x)dx = 7$, τότε

$$\int_{3}^{4} f(x)dx = \int_{3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx =$$

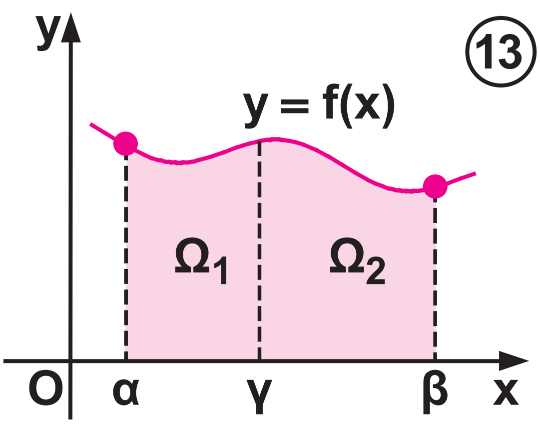
$$= -\int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = -3 + 7 = 4.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

αφού



$E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$, $E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

και

$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $\int_1^4 f(x)dx = 9$, $\int_3^4 f(x)dx = 11$ και $\int_1^8 f(x)dx = 13$, να βρείτε τα ολοκληρώματα:

   i) $\int_4^3 f(x)dx$ ii) $\int_4^8 f(x)dx$

   iii) $\int_1^3 f(x)dx$ iv) $\int_3^8 f(x)dx$.

2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^e \ln t\,dt = \int_e^1 \ln\frac{1}{t}dt.$$

3. Να υπολογίσετε το κ έτσι, ώστε

$$\int_1^{\kappa} \frac{x^2-4}{x^2+1}dx - \int_{\kappa}^{1} \frac{5}{x^2+1}dx = 3.$$

4. Αν $\int_1^3 f(x)dx = 5$ και $\int_1^3 g(x)dx = -2$ να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_1^3 (2f(x) - 6g(x))dx$ ii) $\int_3^1 (2f(x) - g(x))dx$.

3.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ κατευθείαν από τον ορισμό είναι συνήθως μία δύσκολη και πολύ κοπιαστική διαδικασία. Στην παράγραφο αυτή θα αναζητήσουμε τρόπο υπολογισμού ολοκληρωμάτων χωρίς τη χρήση του ορισμού. Σ' αυτό θα μας βοηθήσει το γνωστό, ως θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού στηρίζεται στο επόμενο θεώρημα, το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη παράγουσας μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x\in\Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x),\ \text{για κάθε } x\in\Delta.$$

Για παράδειγμα

$$\left(\int_{0}^{x} \eta\mu^2 t dt\right)'=\eta\mu^2 x \text{ και } \left(\int_{1}^{x} \ln t dt\right)'=\ln x.$$

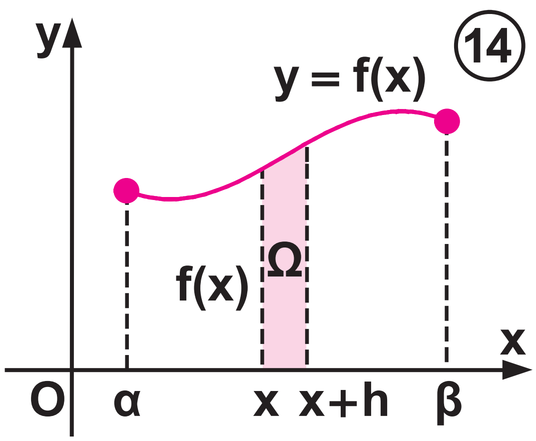
ΣΧΟΛΙΑ

● Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (Σχ. 14) ως εξής:

$$F(x+h)-F(x)=\int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

$$=\text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega$$

$$\approx f(x)\cdot h, \text{ για μικρά } h>0.$$



Άρα, για μικρά $h>0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x),$$

οπότε

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

• Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x),$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.
Για παράδειγμα,

$$\left(\int_{1}^{x^3} \ln t dt\right)' = (\ln x^3)\cdot(x^3)' = (3\ln x)3x^2 = 9x^2\ln x$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$.
Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c, \text{ οπότε } c = G(\alpha).$$

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha). \blacksquare$$

Πολλές φορές, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας, συμβολίζουμε τη διαφορά $G(\beta) - G(\alpha)$ με $[G(x)]_{\alpha}^{\beta}$, οπότε η ισότητα του παραπάνω θεωρήματος γράφεται

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [G(x)]_{\alpha}^{\beta} = \left[\int f(x)dx\right]_{\alpha}^{\beta}.$$

Για παράδειγμα,

$$\int_{1}^{3} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$$\int_{0}^{\pi} ημxdx = [-συνx]_{0}^{\pi} = -συνπ + συν0 = 2$$

$$\int_{1}^{e} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_{1}^{e} = \ln e - \ln 1 = 1.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_{2}^{x} \sqrt{t^2 - 1}dt$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της F.

ii) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η F.

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση $f(t)=\sqrt{t^2-1}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

Για να ορίζεται η F, πρέπει τα άκρα 1, x του ολοκληρώματος να ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f. Άρα, πρέπει $x\in[1,+\infty)$, οπότε το πεδίο ορισμού της F είναι το σύνολο $[1,+\infty)$.

ii) Για $x\in[1,+\infty)$ έχουμε:

$$F'(x)=\left(\int_1^x\sqrt{t^2-1}dt\right)'=\sqrt{x^2-1}.$$

Επειδή η F είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $F'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ελάχιστο το $F(1)=0$.

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

● Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx$. Έχουμε:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\eta\mu x)'dx=\Big[x\eta\mu x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'\eta\mu x dx=$$

$$=\Big[x\eta\mu x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx=$$

$$=\Big[x\eta\mu x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[\sigma\upsilon\nu x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi-2}{2}.$$

● Ο τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$I=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$. Έχουμε:

$$I=\int_1^e \ln x(\ln x)'dx$$

Αν θέσουμε $u=\ln x$, τότε $du=(\ln x)'dx$, $u_1=\ln 1=0$ και $u_2=\ln e=1$. Επομένως,

$$I=\int_0^1 u du=\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^2 \frac{x^2+x-1}{x}dx$ ii) $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ iii) $\int_{-1}^5 |x-2|\,dx$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\int_1^2 \frac{x^2+x-1}{x}dx = \int_1^2 \frac{x^2}{x}dx + \int_1^2 \frac{x}{x}dx - \int_1^2 \frac{1}{x}dx =$$

$$= \int_1^2 x dx + \int_1^2 1 dx - \int_1^2 \frac{1}{x}dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + [x]_1^2 - [\ln x]_1^2 =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{5}{2} - \ln 2.$$

ii) Έχουμε

$$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}}dx + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 + \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4 + [2\sqrt{x}]_1^4 = \frac{20}{3}.$$

iii) Επειδή $|x-2|=\begin{cases} 2-x, & x\le 2 \\ x-2, & x\ge 2 \end{cases}$, έχουμε

$$\int_{-1}^{5}|x-2|\,dx=\int_{-1}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{5}(x-2)dx=$$

$$=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{5}=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=9.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^2(3x^2-2x+1)dx$ ii) $\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}dx$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\text{συν}x-2\text{ημ}x)dx$ iv) $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx.$

2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2\frac{x^3+7x}{x^2+5}dx+2\int_2^1\frac{x}{x^2+5}dx=\frac{3}{2}.$$

3. Να αποδείξετε ότι

$$2\int_\alpha^\beta f(x)f'(x)dx=(f(\beta))^2-(f(\alpha))^2.$$

4. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

διέρχεται από τα σημεία A(0,0) και B(1,1), να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f'(x)dx$, εφόσον η f' είναι συνεχής στο [0,1].

5. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i) $F(x)=\int_1^{\text{συν}x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ ii) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{\text{συν}\theta}{\theta}d\theta$

6. i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln(1+\sqrt{2})$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $\int_0^x tg(t)dt = x^4+x^6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το g(1).

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\int_x^{x+1}e^{\text{συν}2\pi t}dt$ είναι σταθερή.

3. Αν $f(x)=\int_0^{x-2}\frac{t}{e^t}dt$, να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

4. Αν $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$, να βρείτε την $F'(x)$.

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε τον τύπο της.

6. Να βρείτε το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}\sqrt{5+t^2}\,dt$.

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)\eta\mu x-\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)]dx$.

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_0^2 (x^2-|x-1|)dx$

ii) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, αν $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x\le 0 \\ \eta\mu x, & 0<x\le \pi \end{cases}$

iii) $\int_0^3 |x^2-3x+2|\,dx$.

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ ii) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

iii) $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$ iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x συν2xdx.$

10. Αν $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xημ^2xdx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xσυν^2xdx$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I+J, \quad I-J, \quad I, \quad J.$$

11. Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\pi} (f(x)+f''(x))ημxdx=2.$$

Αν $f(\pi)=1$, με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το $f(0)$.

12. Έστω οι συναρτήσεις f, g, με f'', g'' συνεχείς στο $[α, β]$. Αν $f(α)=g(α)=0$ και $f'(β)=g'(β)$, να αποδείξετε ότι

$$I=\int_α^β (f(x)g''(x)-f''(x)g(x))\,dx=g'(β)(f(β)-g(β)).$$

3.6 ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού μπορούμε, τώρα, να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$. Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και ισχύει $F'(x) = f(x)$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}. \quad (1)$$

Είναι όμως,

$$F'(\xi) = f(\xi),\ F(\beta) = \int_\alpha^\beta f(t)dt \text{ και } F(\alpha) = \int_\alpha^\alpha f(t)dt = 0.$$

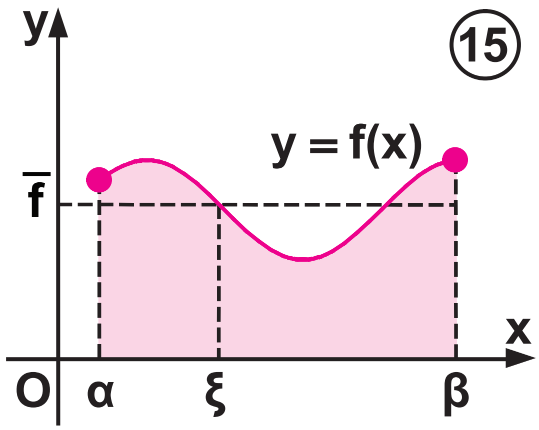
Επομένως, η ισότητα (1) γράφεται $f(\xi) = \dfrac{\int_\alpha^\beta f(t)dt}{\beta-\alpha}$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = f(\xi)(\beta-\alpha). \ ■$$

ΣΧΟΛΙΟ

Ο αριθμός $f(\xi) = \dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}$ λέγεται **μέση τιμή** της συνάρτησης f στο [α, β] και συμβολίζεται με $\bar{f}$.

Γεωμετρικά, η μέση τιμή $\overline{f}$ μιας μη αρνητικής συνάρτησης f στο διάστημα [α, β] παριστάνει το ύψος του ορθογωνίου που έχει βάση το [α, β] και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 15).



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να βρεθεί $\xi \in (0,9)$ έτσι ώστε $f(\xi)=\overline{f}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $$\overline{f}=\frac{\int_0^9 \sqrt{x}\,dx}{9}=\frac{\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9}{9}=\frac{18}{9}=2.$$

Επομένως, αρκεί να βρεθεί $\xi \in (0,9)$ έτσι, ώστε $f(\xi)=2$. Έχουμε

$$f(\xi)=2 \Leftrightarrow \sqrt{\xi}=2 \Leftrightarrow \xi=4.$$

Άρα, το ζητούμενο ξ είναι το 4.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{f}$ της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [0,1], αν δίνεται ότι $\int_0^1 (f(x)-1)dx = 0$.

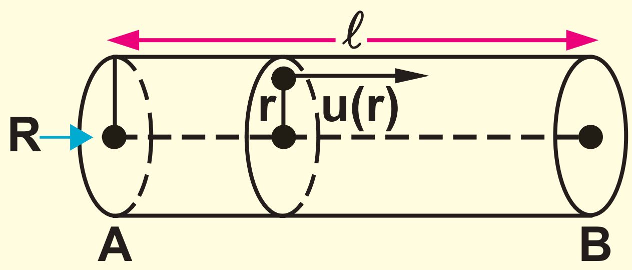
2. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], κ σταθερά και $\int_\alpha^\beta (f(x)-\kappa)\,dx = 0$, να αποδείξετε ότι η μέση τιμή της f στο [α, β] είναι κ.

3. Να βρεθεί η μέση τιμή της μεταβλητής x στο διάστημα [α, β].

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, ορισμένες σ' ένα διάστημα [α, β], $\alpha > 0$.
   Να υπολογίσετε τις $\bar{f}$, $\bar{g}$ και να αποδείξετε ότι $\bar{f} \cdot \bar{g} > 1$.

2. Η ταχύτητα υ του αίματος σ' ένα αγγείο ακτίνας R και μήκους ℓ, σε απόσταση r από τον κεντρικό άξονα του αγγείου είναι $\upsilon(r) = \frac{P}{4n\ell}(R^2 - r^2)$, όπου P η διαφορά πιέσεως μεταξύ των άκρων Α, Β του αγγείου και n το ιξώδες του αίματος (σταθερά).



α) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του αίματος, όταν $r \in [0,R]$.

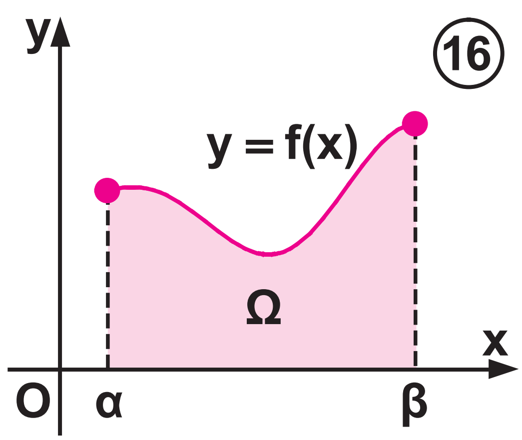
β) Να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα και να τη συγκρίνετε με τη μέση ταχύτητα

3. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ συνάρτηση, με $\int_0^1 f(x)dx = f(1)$.

Να αποδείξετε ότι η C_f έχει μια, τουλάχιστον, οριζόντια εφαπτομένη.

3.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

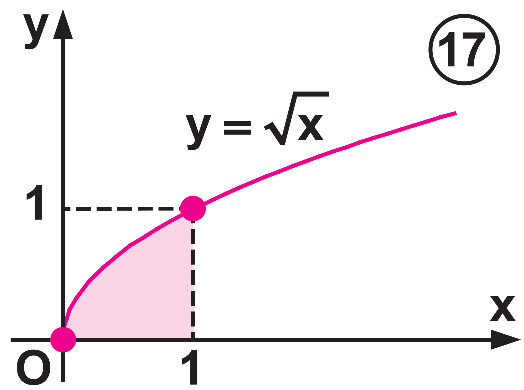
● Στην παράγραφο 4.4 είδαμε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ (Σχ. 16) είναι



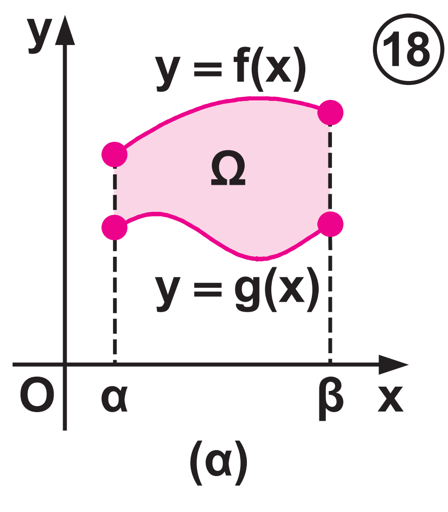
$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)=\sqrt{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ (Σχ. 17) είναι ίσο με

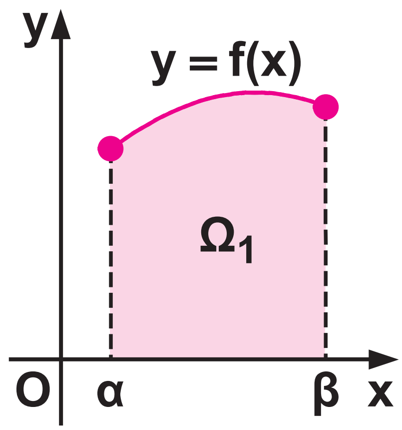
$$\int_0^1 \sqrt{x}dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\ dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$



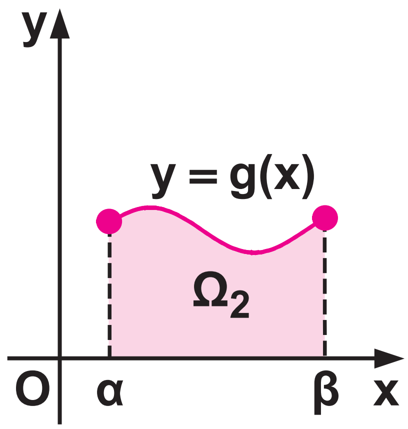
● Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 18α).



(α)



(β)



(γ)

Παρατηρούμε ότι

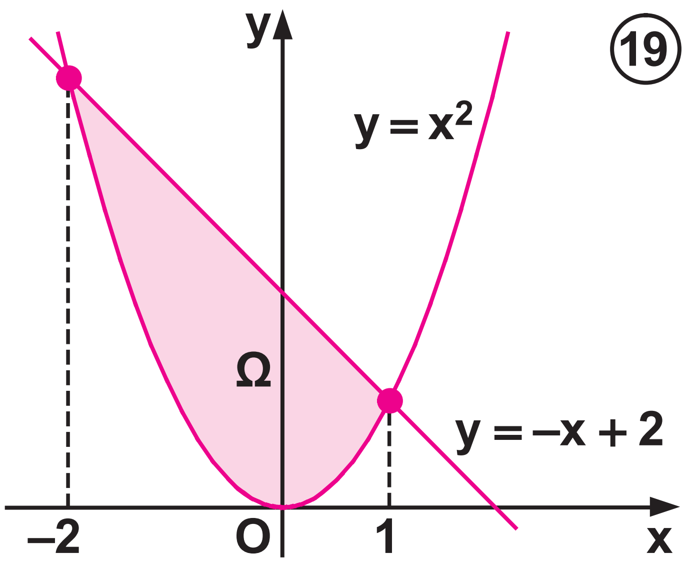
$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx.$$

Επομένως,

$$\boxed{E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx} \qquad (1)$$

Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλεί- εται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -x + 2$ και $g(x) = x^2$ (Σχ. 19)



είναι ίσο με:

$$E(\Omega) = \int_{-2}^{1}[f(x) - g(x)]dx =$$

$$= \int_{-2}^{1}(-x + 2 - x^2)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

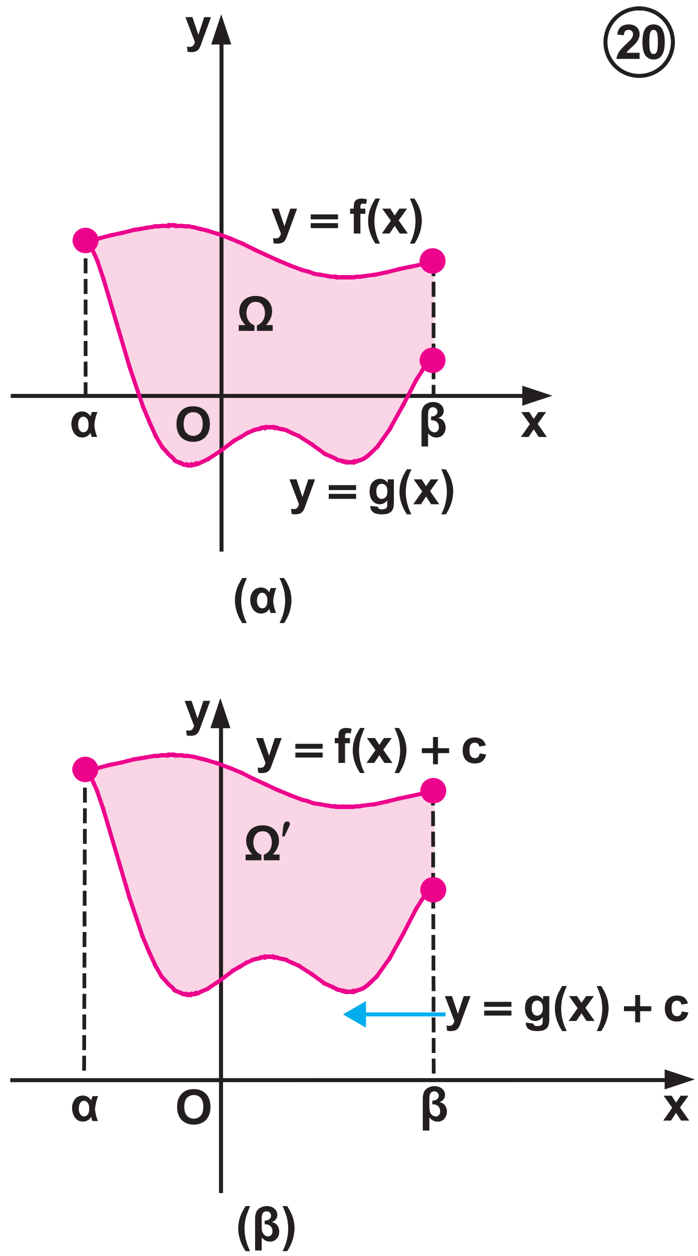
- Ο τύπος (1) βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι:

  (i) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και

  (ii) οι f, g είναι μη αρνητικές στο [α, β].

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι ο τύπος (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση (ii). Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [α, β], θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω′ (Σχ. 20β).



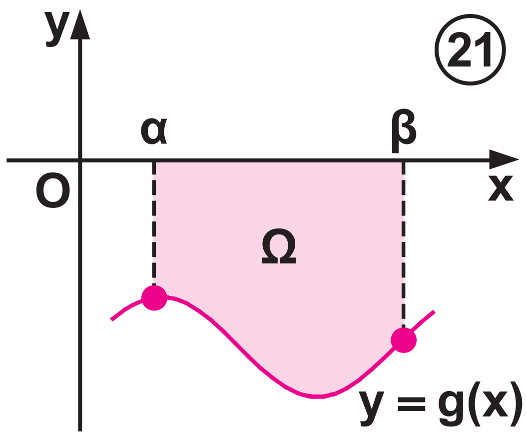
Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$E(\Omega)=E(\Omega')=\int_{\alpha}^{\beta}[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx.$$

Άρα,

$$\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx}$$

● Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα x′x, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x) \le 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 21).



Πράγματι, επειδή ο άξονας x′x είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

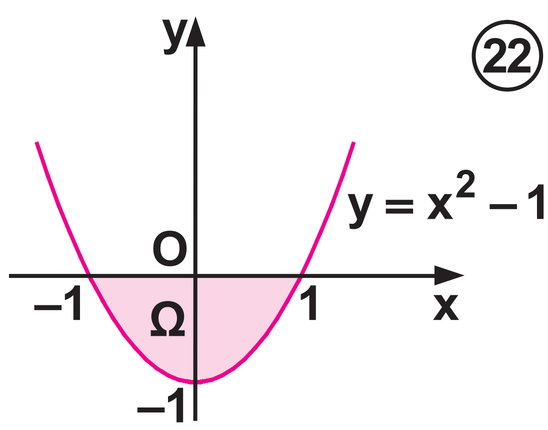
$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx.$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \le 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε

$$\boxed{E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx}$$

Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2-1$ και τον άξονα x′x (Σχ. 22)

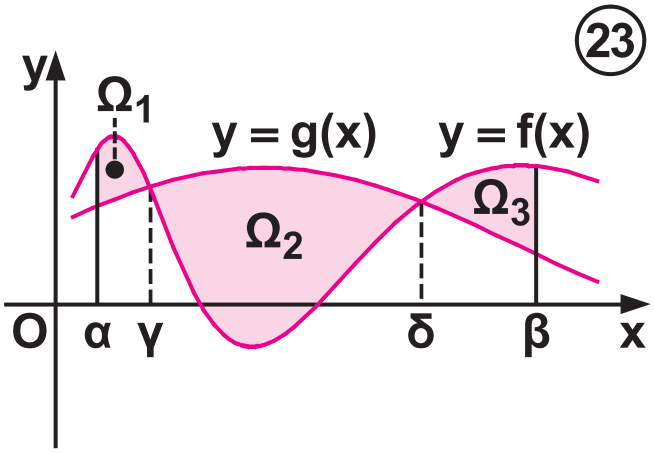


είναι ίσο με

$$E(\Omega)=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$

● Όταν η διαφορά f(x) – g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β], όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες x = α και x = β είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3.



Δηλαδή,

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$$

$$=\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx+\int_{\gamma}^{\delta}(g(x)-f(x))dx+\int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx=$$

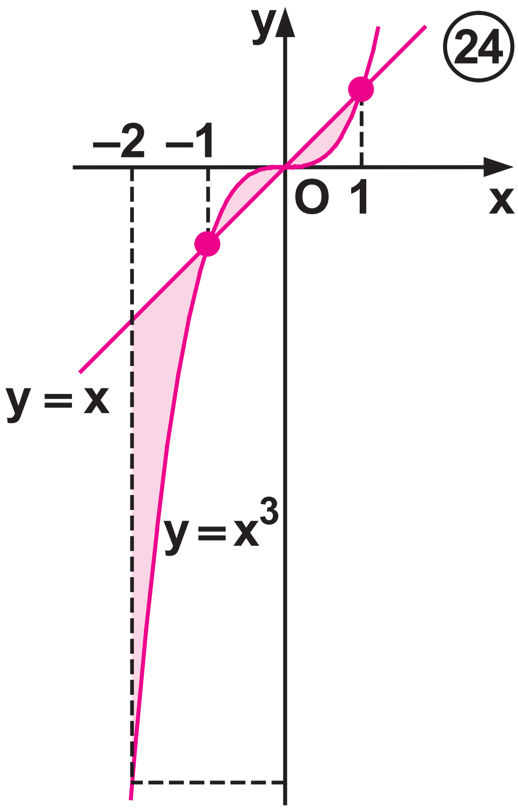
$$=\int_{\alpha}^{\gamma}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\gamma}^{\delta}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\delta}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

Επομένως,

$$\boxed{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} | f(x) - g(x) | \, dx}$$

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ και τις ευθείες $x = -2$, $x = 1$. (Σχ. 24).



Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$ στο διάστημα $[-2, 1]$.

Επειδή

$f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$,

έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	-2		-1		0		1
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0

Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη τον παραπάνω πίνακα, έχουμε

$$E(\Omega)=\int_{-2}^{1}|f(x)-g(x)|=$$

$$=\int_{-2}^{-1}(g(x)-f(x))dx+\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))dx+$$

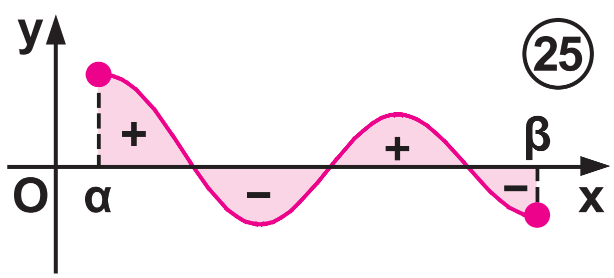
$$+\int_{0}^{1}(g(x)-f(x))dx=$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x-x^3)dx+\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=\frac{11}{4}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x′x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x′x (Σχ. 25)



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = ημx$, $g(x) = συνx$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2π$.

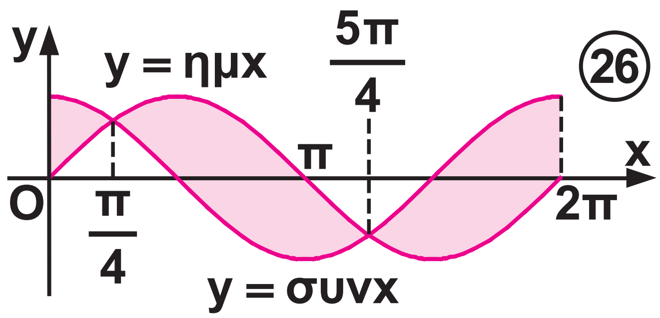
ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$ στο διάστημα $[0, 2π]$. Στο διάστημα αυτό έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow ημx = συνx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow εφx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{π}{4} \text{ ή } x = \frac{5π}{4}$$



Επομένως, για το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x) =$ $= ημx - συνx$ έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	0		$\frac{π}{4}$		$\frac{5π}{4}$		$2π$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη τον πίνακα αυτόν, έχουμε

$$E(\Omega)=\int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|\,dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)dx+$$

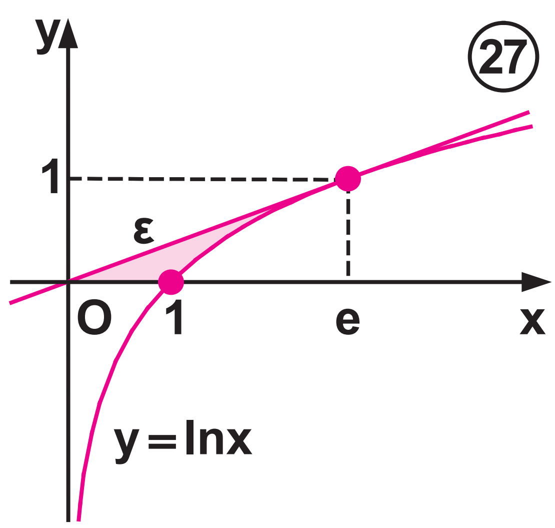
$$+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx=$$

$$=\Big[\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}+$$

$$+\Big[\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\Big]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}=$$

$$=\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=4\sqrt{2}\,.$$

2. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)=\ln x$, τον άξονα των x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e, 1)$.



ΛΥΣΗ

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A(e, 1) είναι

$$\varepsilon: y-1=f'(e)(x-e). \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, έχουμε $f'(e)=\dfrac{1}{e}$.

Επομένως, η (1) γράφεται:

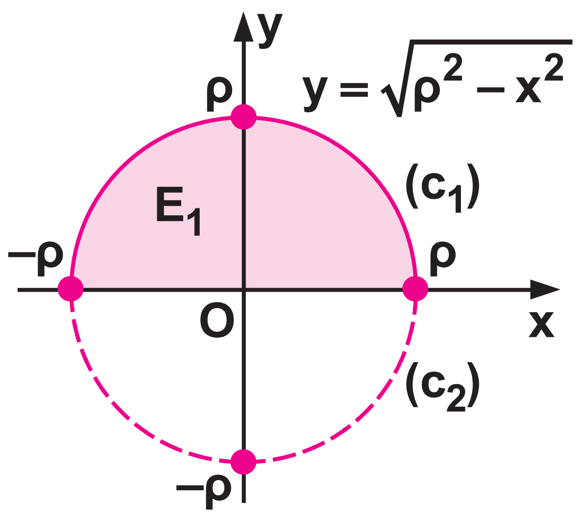
$$y-1=\frac{1}{e}(x-e) \Leftrightarrow y=\frac{1}{e}x.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν E είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου μείον το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$, δηλαδή

$$E=\int_0^e \frac{1}{e}x\,dx-\int_1^e \ln x\,dx=\left[\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}\right]_0^e-\left([x\ln x]_1^e-\int_1^e x\frac{1}{x}dx\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}\right]_0^e-[x\ln x]_1^e+[x]_1^e=\frac{e-2}{2}.$$

3. **Να υπολογιστεί το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου $x^2+y^2=\rho^2$.**



ΛΥΣΗ

Το ημικύκλιο C_1 είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\sqrt{\rho^2-x^2},\ x\in[-\rho,\rho],$$

αφού για $y>0$ είναι

$$x^2+y^2=\rho^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{\rho^2-x^2}.$$

Αν E_1 είναι το εμβαδόν του ημικυκλίου, τότε $E=2E_1$. Επειδή $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-\rho,\rho]$, έχουμε

$$E_1=\int_{-\rho}^{\rho}\sqrt{\rho^2-x^2}dx. \qquad (1)$$

Επειδή $-\rho\leq x\leq \rho$, έχουμε $-1\leq\frac{x}{\rho}\leq 1$. Επομένως, υπάρχει $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{x}{\rho}=\eta\mu\theta. \qquad (1)$$

Έτσι, έχουμε $x=\rho\eta\mu\theta$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε $dx=\rho\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$.

Επιπλέον, για $x=-\rho$ είναι $\theta=-\frac{\pi}{2}$ και για $x=\rho$ είναι $\theta=\frac{\pi}{2}$. Επομένως,

$$E_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho^2-\rho^2\eta\mu^2\theta}\cdot\rho\sigma\upsilon\nu\theta d\theta=$$

$$=\rho^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta d\theta=\rho^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta d\theta=$$

$$=\rho^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta= \qquad \text{(Επειδή } \sigma\upsilon\nu\theta>0\text{)}$$

$$=\rho^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}d\theta=\rho^2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\eta\mu 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi\rho^2}{2}.$$

Άρα $E=2E_1=\pi\rho^2$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το εμβαδόν της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι ίσο με $\pi\alpha\beta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x+3$, τις ευθείες $x=0$, $x=2$ και του άξονα των x.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των x και τις ευθείες που δίνονται κάθε φορά:

   i) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=0$, $x=27$

   ii) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{3}$.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x$ και τον άξονα των x.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^3$ και $g(x)=2x-x^2$.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4-x^2$ και την ευθεία $x-y-2=0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=3x^2$
   i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της Α(1, 3).
   ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο Α και τον άξονα των x.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της

   $f(x)=\begin{cases} -x^2+3, & x<1 \\ 2\sqrt{x}, & x\geq 1 \end{cases}$, τις ευθείες $x=-1$, $x=2$

   και τον άξονα των x.

3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

   $f(x)=\begin{cases} -x^2+4x-3, & x<2 \\ -2x+5, & x\geq 2 \end{cases}$ και τον άξονα των x.

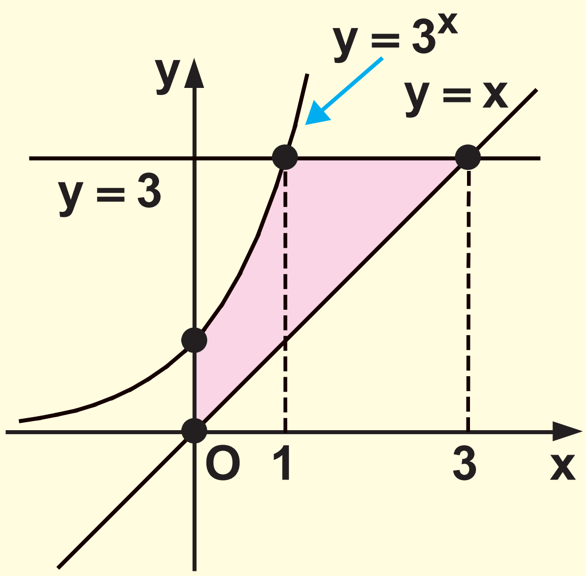
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

   $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{3}$.

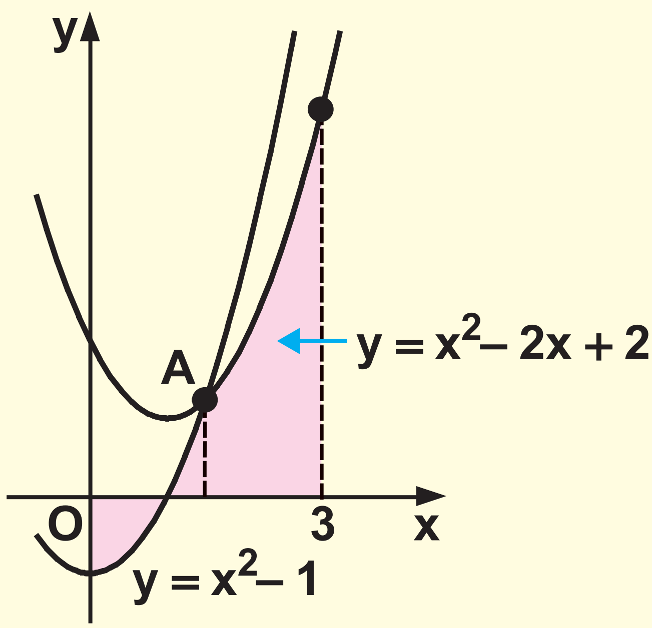
5. i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν, $E(\lambda)$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{e}{x}$, $g(x)=\ln x$, τον άξονα των x και την ευθεία $x=\lambda$, $\lambda>e$.

   ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

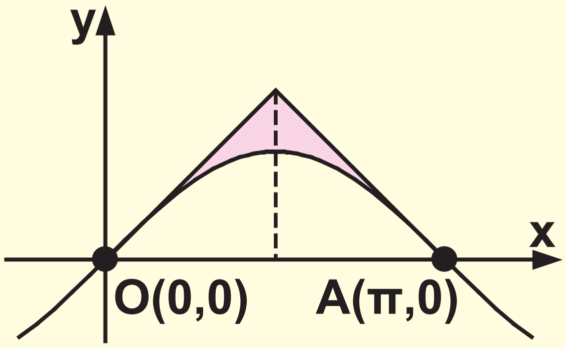
6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημx$



i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία O(0, 0) και A(π, 0).

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις εφαπτόμενες στα σημεία O και A.

9. i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, την εφαπτόμενή της στο σημείο (1, 1) και τον άξονα των x.

ii) Να βρείτε την ευθεία $x = α$, η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln\frac{1}{x}$ και την ευθεία $y = \ln 2$.

11. i) Να βρείτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο A(0,2) και η κλίση της στο σημείο M(x, f(x)) είναι $2x - 3$.

ii) Ποιο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν η C_f και ο άξονας των x.

12. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)(x-3)$.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία Α, Β που η C_f τέμνει τον άξονα των x.

ii) Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{2}{1}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $u=\pi-x$ για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi}\frac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx$.

2. i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2-1}dx$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx$.

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{(u+1)(u+2)}du$$

και στη συνέχεια τα ολοκληρώματα:

i) $\displaystyle\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+1)(\eta\mu x+2)}dx$ ii) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)}dx$.

4. Αν $I_\nu = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2}dt,\ \nu \in \mathbb{N}$,

i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_\nu + I_{\nu+1},\ \nu \in \mathbb{N}$

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_1, I_2.

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$, όπου

$$f(t) = \int_1^t \sqrt{u^2-1}\,du.$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και F.

ii) Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

7. Δίνονται τα ολοκληρώματα

$$F(x)=\int_0^x e^t συν^2 t dt \text{ και } G(x)=\int_0^x e^t ημ^2 t dt,\ x\in\mathbb{R}.$$

i) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$F(x)+G(x) \text{ και } F(x)-G(x)$$

και στη συνέχεια τα ολοκληρώματα $F(x)$ και $G(x)$.

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I=\int_\pi^{2\pi} e^t συν^2 t dt \text{ και } J=\int_\pi^{2\pi} e^t ημ^2 t dt.$$

8. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ και την ευθεία $y=5$ χωρίζεται από την ευθεία $y=α^2+1$, $α>0$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α.

9. i) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(λ)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τον άξονα των x και τις και τις ευθείες $x=1$, $x=λ$, $λ>0$.

ii) Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι, ώστε $E(λ)=\dfrac{1}{2}$.

iii) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{λ\to 0} E(λ)$ και $\lim\limits_{λ\to +\infty} E(λ)$.

10. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx .$$

ii) Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο [α, β], τότε

$$m(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$$

iii) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\varepsilon\varphi x > x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi}$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ και

β) $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}$.

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και

β) $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1.$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

1. Ισχύει

   $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)+g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$ Α Ψ

2. Ισχύει

   $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\cdot g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$ Α Ψ

3. Αν $\alpha=\beta$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx = 0$. Α Ψ

4. Αν $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Α Ψ

5. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \geq 0$. Α Ψ

6. Αν $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Α Ψ

7. $\int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4+1)dx<\int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4+x^2+1)dx$,
για κάθε $\alpha>0$. Α Ψ

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1-\eta\mu^2 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sigma\upsilon\nu x dx$. Α Ψ

9. $\int f(x)dx=xf(x)-\int xf'(x)dx$. Α Ψ

10. $\int_1^e \ln x dx=\int_e^1 \ln\frac{1}{t}dt$. Α Ψ

11. Αν $\int_0^1(f(x)-1)dx=0$ τότε $\overline{f}=1$. Α Ψ

12. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε $f(\xi)=0$
για κάποιο $\xi\in(\alpha,\beta)$. Α Ψ

13. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού
μηδέν στο [α, β], τότε η f παίρνει δυο,
τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές. Α Ψ

14. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}(x^3-x)dx$
παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου
που περικλείεται από τη γραφική
παράσταση της συνάρτησης
$f(x)=x^3-x$ και τον άξονα των x. Α Ψ

ΙΙ.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Αν $f'(x) = \eta\mu\pi x$ και $f(0) = 0$, τότε το $f(1)$ ισούται με

   Α) $-\frac{1}{\pi}$, Β) $\frac{1}{\pi}$, Γ) $\frac{-2}{\pi}$, Δ) $\frac{2}{\pi}$.

2. Το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{4-x}dx$ στο $(4, +\infty)$ είναι ίσο με

   Α) $\ln(4-x)+c$, Β) $-\ln(4-x)+c$,

   Γ) $\ln(x-4)+c$, Δ) $-\ln(x-4)+c$.

3. Το ολοκλήρωμα $\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$ στο $(0, +\infty)$ είναι ίσο με

   Α) $\dfrac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}+c$, Β) $2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$,

   Γ) $\dfrac{(1-\ln x)^3}{3}+c$, Δ) $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}-2x+c$,

   Ε) $\dfrac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+c$.

4. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx$ είναι ίσο με

   Α) $\frac{4}{3}$, Β) 0, Γ) $-\frac{4}{3}$, Δ) $\frac{2}{3}$, Ε) $\frac{5}{3}$.

5. Το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$ είναι ίσο με

Α) $\frac{1}{x}+c$, Β) $\frac{\ln^2 x}{2}+c$, Γ) $x(\ln x-1)+c$,

Δ) $\frac{\ln^3 x}{3}+c$.

6. Έστω f, g δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο [α, β].

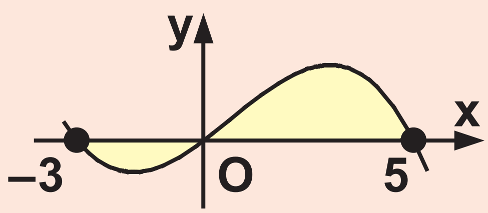
Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

Α) $f'(x)\le g'(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$, Β) $\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Γ) $\int f(x)dx \le \int g(x)dx$, $x\in[\alpha,\beta]$,

Δ) $\int_\beta^\alpha f(x)dx \le \int_\beta^\alpha g(x)dx$.

7. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με



Α) $\int_{-3}^{5} f(x)dx$, Β) $\int_{5}^{-3} f(x)dx$.

Γ) $\int_{-3}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{5} f(x)dx$, Δ) $-\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{5} f(x)dx$.

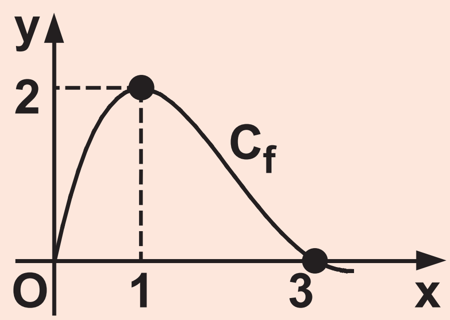
8. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και $f(0) = g(0) + 2$, τότε για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει:

Α) $f(x) = g(x) - 2$, Β) $\int_{-1}^{1}(f(x) - g(x))dx = 4$.

Γ) $f(x) \leq g(x)$, $x \in [-1,1]$

Δ) Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1, 1]$.

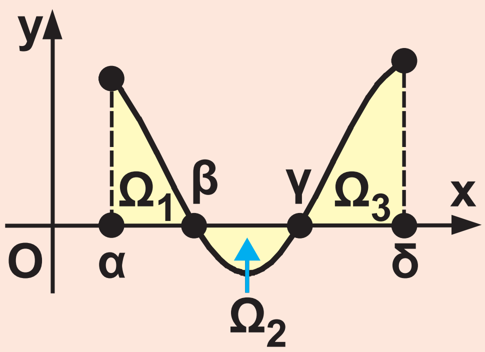
9. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt$ όπου f η συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.



Τότε η $F'(1)$ είναι ίση με

Α) 0, Β) 1, Γ) 2, Δ) $\frac{1}{2}$.

10. Έστω η συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος.

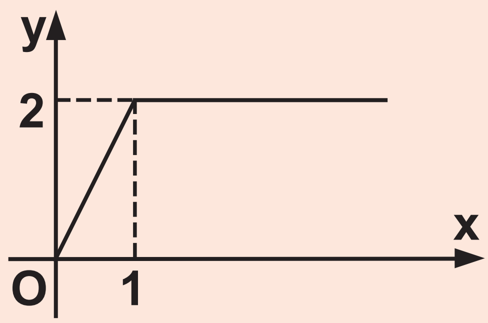


Αν $E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$ τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με

Α) 6, Β) -4, Γ) 4,

Δ) 0, Ε) 2.

11. Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, όπου f η συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.



Τότε

Α) $F(x)=x^2$,

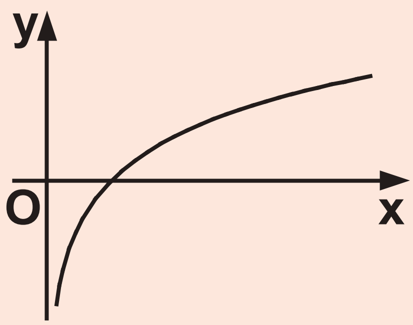
Β) $F(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x<1 \\ 2, & 1\le x \end{cases}$,

Γ) $F(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 2x, & 1\le x \end{cases}$,

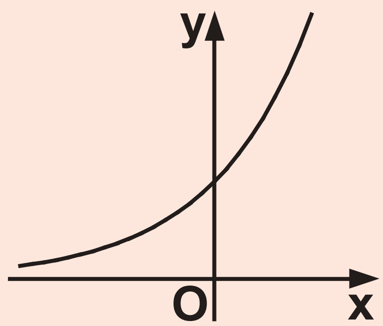
Δ) $F(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 2x-1, & 1\le x \end{cases}$.

III.

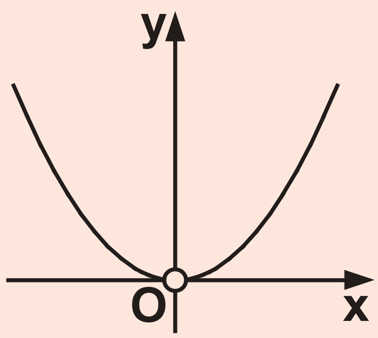
1. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αντιπροσωπεύει τη γραφική παράσταση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης $xy' = y$, με $x, y > 0$.



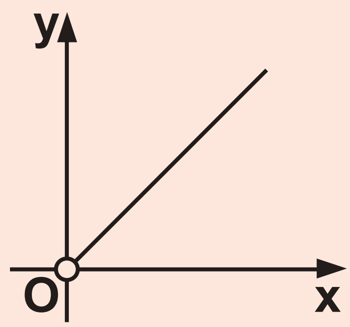
(Α)



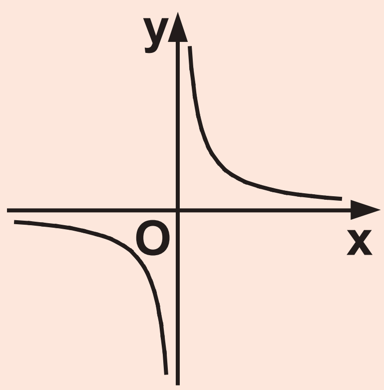
(Β)



(Γ)



(Δ)



(Ε)

2. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$, Β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ ημxdx, Γ) $\int_0^{\pi}$ εφxdx

Δ) $\int_0^1 \ln x dx$, Ε) $\int_0^2 \sqrt{1-x^2}dx$, Ζ) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$.

3. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int (x)' \frac{1}{x}dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx =$$

$$= 1 - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= 1 + \int \frac{1}{x}dx.$$

Άρα $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$, οπότε $0 = 1$!

4. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$= -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}du = -I$. (Θέσαμε $x = \frac{1}{u}$ οπότε

$dx = -\frac{1}{u^2}du$).

Άρα $I = -I$ οπότε $I = 0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού

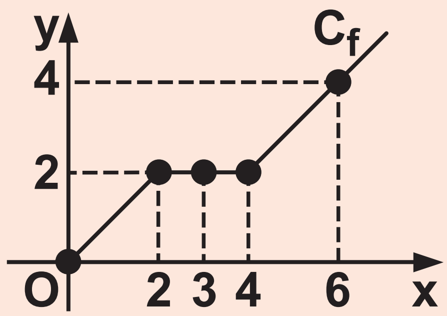
$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx > 0,$$

επειδή $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

όπου f η συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.



Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

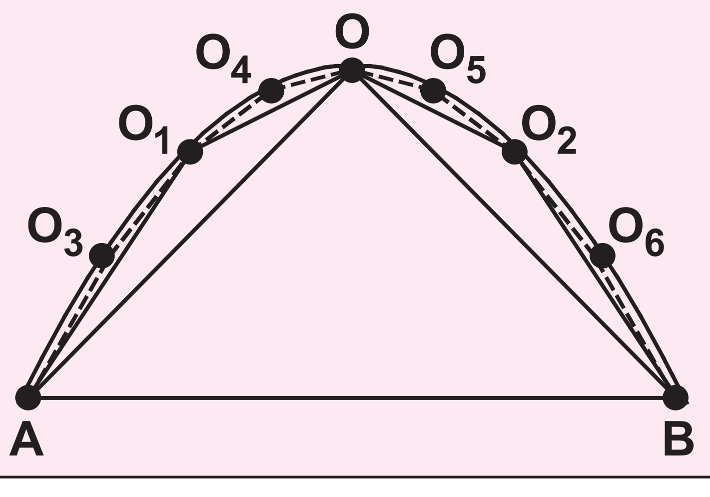
$F(0) = \square$, $F(2) = \square$, $F(3) = \square$, $F(4) = \square$, $F(6) = \square$.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Αρχική συνάρτηση - Αόριστο ολοκλήρωμα

Η αυτονόητη σημασία των προβλημάτων που συνδέονται με τον υπολογισμό εμβαδών και οι ιδιαίτερες δυσκολίες που παρουσιάζουν, οδήγησαν τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα στην επινόηση γενικών μεθόδων μέτρησης εμβαδών, ιδιαίτερα επιφανειών που περικλείονται από καμπύλες. Καθοριστική στο ζήτημα αυτό υπήρξε η συμβολή των αρχαίων Ελλήνων και ιδιαίτερα του Αρχιμήδη. Οι ιδέες του Αρχιμήδη πάνω στο πρόβλημα του εμβαδού υπήρξαν η αφετηρία της δημιουργίας του σύγχρονου ολοκληρωτικού λογισμού. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού μιας επιφάνειας που περικλείεται από ένα τμήμα παραβολής και ένα ευθύγραμμο τμήμα (παραβολικό χωρίο).

Έστω ένα παραβολικό χωρίο με βάση ΑΒ και κορυφή Ο (το σημείο της παραβολής που έχει τη μέγιστη απόσταση από τη βάση). Ο Αρχιμήδης, φέρνοντας τις χορδές ΟΑ και ΟΒ, δημιουργεί δυο νέα παραβολικά χωρία με βάσεις ΟΑ, ΟΒ και κορυφές O_1, O_2 αντίστοιχα.



Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής, αποδεικνύει ότι για τα εμβαδά των τριών τριγώνων ΟΑΒ, O_1AO και O_2BO ισχύει η σχέση

$$(OAB) = 4[(O_1AO) + (O_2BO)]. \qquad (1)$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία στα νέα παραβολικά χωρία, βρίσκει ότι

$$(O_1AO) = 4[(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] \qquad (2)$$

και

$$(O_2BO) = 4[(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] \qquad (3)$$

Με τον τρόπο αυτό, το εμβαδόν Ε του παραβολικού χωρίου μπορεί να προσεγγιστεί ("εξαντληθεί") από ένα άθροισμα εμβαδών εγγεγραμμένων τριγώνων ως εξής:

$$E = (OAB) + [(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] + [(OAO_1) + (O_4O_1O)] +$$
$$+ [(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] + ... =$$

$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}(O_1AO) + \frac{1}{4}(O_2BO) + \cdots =$$

$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}[(O_1AO) + (O_2BO)] + \cdots =$$

$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (OAB) + \cdots$$

Όπως είναι φανερό, πρόκειται για το άθροισμα των (απείρων) όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το $\alpha = (OAB)$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{4}$.

Το άθροισμα αυτό δίνεται σήμερα από το γνωστό τύπο

$$\frac{\alpha}{1-\lambda} = \frac{(OAB)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(OAB).$$

Το εμβαδόν λοιπόν του παραβολικού χωρίου είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου που ορίζουν τα άκρα της βάσης και η κορυφή της παραβολής(*)

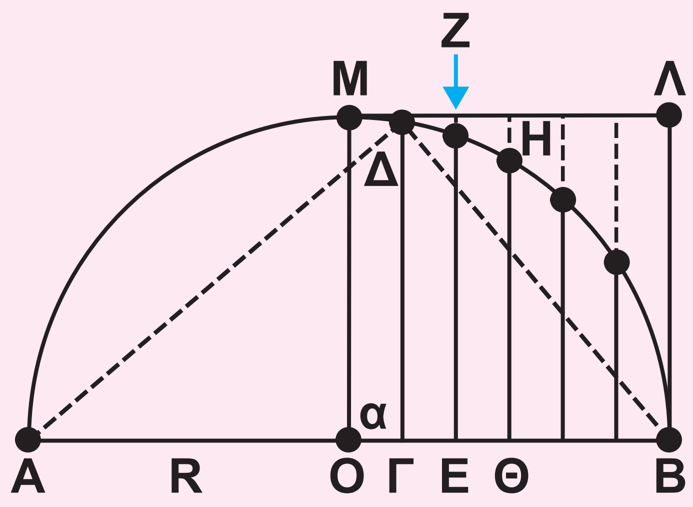
(*) Η διατύπωση στο έργο του Αρχιμήδη “Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής” είναι: “παν τμάμα περιεχόμενον υπό ευθείας και ορθογωνίου κώνου τομάς επίτριτον εστι του τριγώνου του βάσιν έχοντος ταν αυτάν και ύψος ίσον τω τμάματι”. Ο Αρχιμήδης στην πραγματικότητα εργάστηκε λίγο διαφορετικά αποφεύγοντας την έννοια του απείρου, χρησιμοποίησε πεπερασμένο πλήθος όρων του παραπάνω αθροίσματος και έδειξε ότι το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $\frac{4}{3}$ (OAB) αποκλείοντας (με απαγωγή σε άτοπο) τις περιπτώσεις να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό.

Όπως στα προβλήματα ακροτάτων και εφαπτομένων έτσι και στο πρόβλημα του εμβαδού, οι ιδέες των αρχαίων Ελλήνων γνώρισαν παραπέρα εξέλιξη μετά την ανάπτυξη της Άλγεβρας και την εφαρμογή της σε γεωμετρικά προβλήματα. Στη διάρκεια του 17ου αιώνα διαπιστώθηκε ότι ο υπολογισμός των εμβαδών μπορεί να γίνει με μια διαδικασία αντίστροφη προς αυτήν της παραγώγισης.

Ορισμένο ολοκλήρωμα - Η έννοια του εμβαδού

Χαρακτηριστικό παράδειγμα της νέας μεθόδου αντιμετώπισης προβλημάτων υπολογισμού εμβαδών κατά τον 17ο αιώνα αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο ο J. Wallis ανακάλυψε το 1655 μια νέα αναλυτική έκφραση για το εμβαδόν του κύκλου και τον αριθμό π.

Ο Wallis θεώρησε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2R, χώρισε την ακτίνα του ΟΒ σε ίσα τμήματα μήκους α και από κάθε σημείο διαίρεσης ύψωσε μια κάθετη (βλ. σχήμα).



Όπως είναι γνωστό από την Ευκλείδεια γεωμετρία, κάθε μια από αυτές τις κάθετες είναι μέση ανάλογη των δύο τμημάτων στα οποία χωρίζει τη διάμετρο ΑΒ. Π.χ., για την κάθετη ΓΔ, που είναι ύψος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΑΒ, ισχύει

$$ΓΔ^2 = ΑΓ \cdot ΓΒ = (R+α)(R-α) = R^2 - α^2$$

δηλ. $ΓΔ = \sqrt{R^2 - α^2}$. **Όμοια προκύπτει** $ΕΖ = \sqrt{R^2 - 4α^2}$ **,** $ΗΘ = \sqrt{R^2 - 9α^2}$ **κ.ο.κ. Αφού υπολόγισε με τον τρόπο αυτό όλες τις (πεπερασμένου πλήθους) κάθετες που “εξαντλούν” το τεταρτημόριο ΟΜΒ, ο Wallis πραγματοποίησε μια “μετάβαση στο άπειρο” με τον εξής συλλογισμό:**

“Ο λόγος του αθροίσματος όλων αυτών των καθέτων προς το άθροισμα των μεγίστων τιμών τους (δηλ. των ακτίνων) είναι ίδιος με το λόγο του τεταρτημορίου (το οποίο “εξαντλούν” αυτές οι κάθετες) προς το τετράγωνο με πλευρά την ακτίνα (δηλ. το τετράγωνο ΟΜΛΒ, το οποίο “εξαντλούν” οι ακτίνες - προεκτάσεις των καθέτων)”.

Διατυπωμένο σε συμβολική γλώσσα, το συμπέρασμα αυτό του Wallis γίνεται

$$\frac{\sqrt{R^2 - 0^2} + \sqrt{R^2 - α^2} + \sqrt{R^2 - 4α^2} + \cdots}{R + R + R + \cdots} =$$

$$= \frac{\text{τεταρτημόριο(ΟΜΒ)}}{\text{τετράγωνο(ΟΜΛΒ)}} = \frac{\frac{1}{4}πR^2}{R^2} = \frac{π}{4} \qquad (1)$$

Αυτό το μίγμα Γεωμετρίας, Άλγεβρας και “πρωτόγονου” απειροστικού λογισμού, ισοδυναμεί ουσιαστικά με τη σύγχρονη σχέση

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε $R=1$ (δηλ. το μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2=1$) και διαιρέσουμε την ακτίνα (δηλ. το διάστημα [0,1] σε ν ίσα τμήματα μήκους το καθένα $\frac{1}{\nu}$, τότε το πρώτο μέλος της προηγούμενης ισότητας (1) γίνεται

$$\frac{1}{\nu}\left[\sqrt{1-\left(\frac{0}{\nu}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{\nu}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2}\right].$$

Αυτό όμως όπως θα δούμε παρακάτω είναι το κατώτερο άθροισμα της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (που προκύπτει από την εξίσωση του κύκλου), ως προς την προηγούμενη διαμέριση του διαστήματος [0,1], και το όριό του όταν $\nu \to +\infty$, είναι το

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Η έννοια του ολοκληρώματος, όπως και οι άλλες θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης, έγιναν αντικείμενο συστηματικής κριτικής και ορίστηκαν με λογική αυστηρότητα στη διάρκεια του 19ου αιώνα. Η έννοια του ολοκληρώματος που χρησιμοποιούμε σήμερα στο σχολείο, στηρίζεται στον επόμενο ορισμό του συμβόλου $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ που έδωσε ο B. Riemann το 1854:

“Θεωρούμε μια ακολουθία τιμών $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ που βρίσκονται ανάμεσα στα α και β κατά σειρά μεγέθους και συμβολίζουμε χάριν συντομίας το $x_1 - \alpha$ με δ_1, το $x_2 - x_1$ με δ_2, ... το $\beta - x_{\nu-1}$ με δ_ν και τα γνήσια θετικά κλάσματα με ε_i . Τότε η τιμή του αθροίσματος

$$S = \delta_1 f(\alpha + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \ldots + \\ + \delta_\nu f(x_{\nu-1} + \varepsilon_\nu\delta_\nu)$$

θα εξαρτάται από την εκλογή των διαστημάτων δ_i και των ποσοτήτων ε_i. Αν έχει την ιδιότητα, ανεξαρτήτως της εκλογής των δ_i και ε_i , να τείνει προς ένα σταθερό όριο Α καθώς όλα τα δ_i γίνονται απειροελάχιστα, τότε η τιμή αυτή ονομάζεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Αν δεν έχει αυτή την ιδιότητα, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δεν έχει κανένα νόημα”.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Β΄ ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)

1 ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

§ 1.1 - 1.2 Α' Ομάδας

1. i) $A=\mathbb{R}-\{1,2\}$ ii) $A=[1,2]$ iii) $A=[-1,0)\cup(0,1]$
   iv) $A=(-\infty,0)$.

2. i) $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ ii) $x\in(-1,1)$ iii) $x>0$.

3. i) $x>0$ ii) $x>1$.

4. α) 200,69cm β) 195,23 cm.

5. $E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{\sqrt{3}}{36}(20-x^2)$ με $x\in(0,20)$.

6. i) $f(A)=\{2,0\}$ ii) $f(A)=\mathbb{R}$ iii) $f(A)=[2,+\infty)$
   iv) $f(A)=[0,+\infty)$.

7. i) είναι ίσες στο $[0,+\infty)$ ii) είναι ίσες στο $\mathbb{R}^*$
   iii) είναι ίσες στο $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

8. Είναι

$$(f+g)(x)=\frac{1}{x(1-x)},(f-g)(x)=\frac{1-2x^2}{x(1-x)},$$

$$(fg)(x)=\frac{1+x}{1-x},\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1-x^2}{x^2}.$$

9. $(f+g)(x)=2\sqrt{x}$, $(f-g)(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$,

$(fg)(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

10. i) $(g\circ f)(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ ii) $(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$, $x\in\mathbb{R}$

iii) $(g\circ f)(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$

11. $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$, $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$(f\circ g)(x)=x-1$, $x\in[2,+\infty)$.

12. i) Είναι σύνθεση των $h(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = ημx$.

ii) Είναι σύνθεση των $h(x) = 3x$, $g(x) = ημx$ και $φ(x) = 2x^2+1$

iii) Είναι σύνθεση των συναρτήσεων $h(x) = 2x$, $g(x)=e^x-1$ και $φ(x) = \ln x$.

iv) Είναι σύνθεση των συναρτήσεων $h(x) = 3x$, $g(x) = ημx$ και $φ(x) = x^2$.

§ 1.1 - 1.2 Β' Ομάδας

1. i) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\le x<1\\ -x+2, & 1\le x<2\end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ -2x+4, & 1<x\le 2\end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\cup[2,3)\\ 0, & x\in[1,2)\cup[3,4)\end{cases}.$

2. $K(x)=8\pi x^2+\dfrac{500\pi}{x}$, $x>0$ και το κόστος είναι $300\pi\cong 942$ λεπτά $=9{,}42$ ευρώ.

3. $E(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x\le 1\\ 2x-1, & 1<x\le 3\end{cases}.$

4. $E(x)=-2x^2+10x, 0<x<5,$

$p(x)=20-2x, 0<x<5.$

5. i) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 1, & -1\le x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$ και $f(A)=[1,+\infty)$.

ii) $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\\ 0, & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$ και $f(A)=[0, 1]$.

6. i) $f(x)=x^2+1$ ii) $f(x)=\sqrt{1-x}$

7. $\alpha = 1$.

8. α) πράξεις β) πράξεις.

9. i) $N(t) = 10\sqrt{2(t + 9\sqrt{t} + 20)}$ ii) 16 χρόνια.

§ 1.3 Α' Ομάδας

1. i) f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$

   ii) f γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

   iii) f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

   iv) f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

2. i) Είναι 1–1 και $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

   ii) Δεν είναι 1–1. iii) Δεν είναι 1–1.

   iv) Είναι 1–1 και $f^{-1}(x) = 1 - x^3$, $x \geq 0$.

   v) Είναι 1–1 και $f^{-1}(x) = 1 - e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

   vi) Είναι 1–1 και $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1}{x-1}$, $x > 1$.

   vii) Είναι 1–1 και $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.

   viii) Δεν είναι 1–1.

3. Οι συναρτήσεις f, φ και ψ αντιστρέφονται, ενώ η g δεν αντιστρέφεται.

4. i), ii), iii) να εφαρμόσετε ιδιότητες των ανισοτήτων.

§ 1.4 Α' Ομάδας

1. i) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$, $f(3)=2$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$, $f(2)=4$.

   iii) Δεν υπάρχει όριο στα $x_0=1$, $x_0=2$, $f(1)=1$, δεν ορίζεται η f στο 2.

   iv) Δεν υπάρχει όριο στα $x_0=1$, $x_0=2$ ενώ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$, $f(1)=1$, $f(2)=2$ και δεν ορίζεται στο 3.

2. i) -1 ii) 1 iii) δεν υπάρχει iv) δεν υπάρχει.

3. i) 4 και 2 ii) δεν υπάρχει.

4. i) ψευδής ii) ψευδής iii) ψευδής
   iv) Αληθής v) ψευδής vi) Αληθής.

5. $\lambda=3$ ή $\lambda=-2$.

§ 1.5 Α' Ομάδας

1. i) 5   ii) -1 iii) 2^{20} iv) 0   v) $-\frac{1}{2}$

vi) 2   vii) $\sqrt[3]{9}$ viii) 0.

2. i) 43   ii) $\frac{3}{17}$ iii) 6.

3. i) $\frac{8}{3}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{1}{2}$ iv) 27.

4. i) $\frac{1}{6}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{3}{8}$ iv) $\frac{1}{12}$.

5. i) δεν υπάρχει   ii) 2.

6. i) 3   ii) 1   iii) 2   iv) 0   v) 1   vi) 4.

7. i) 2   ii) 0   iii) $\frac{1}{2}$.

8. i) 1   ii) 1.

9. $\alpha = \frac{4}{3}$ και $\beta = 2$.

§ 1.5 Β' Ομάδας

1. i) $\frac{7}{12}$ ii) 0   iii) $\frac{1}{2}$.

2. i) δεν υπάρχει   ii) 5   iii) 7   iv) 3.

3. i) 0   ii) 1   iii) 1.

4. i) –2 ii) 0.

§ 1.6 Α' Ομάδας

1. i) $+\infty$ ii) $-\infty$ iii) δεν υπάρχει.

2. i) δεν υπάρχει ii) δεν υπάρχει iii) δεν υπάρχει.

§ 1.6 Β' Ομάδας

1. $-\infty$.

2. i) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty \text{ και } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = -\infty.$$

ii) Ομοίως.

3. Για $\lambda = 2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$.

Για $\mu = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2$.

4. i) 0 ii) $-\infty$ iii) $+\infty$.

§ 1.7 Α' Ομάδας

1. i) $-\infty$ ii) $-\infty$ iii) 0 iv) $+\infty$ v) $\frac{1}{2}$

vi) 0 vii) 0 viii) 2.

2. i) $+\infty$ ii) $+\infty$ iii) $+\infty$ iv) $+\infty$ v) 0.

3. i) 1 ii) 0 iii) -1 iv) 0 v) -1

vi) $+\infty$.

§ 1.7 Β' Ομάδας

1. i) Για $\mu<1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$,

$\mu>1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\mu=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

ii) Για $\mu=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\mu=0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases}+\infty, & \mu\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\\ -\infty, & \mu\in(0,1)\end{cases}.$$

2. Για $\lambda<1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,

$\lambda>1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lambda=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{5}{2}$.

Ώστε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ μόνο αν $\lambda = 1$

3. $\alpha = \beta = 1$.

4. i) 1 ii) $\sqrt{3}+1$ iii) $+\infty$.

§ 1.8 Α' Ομάδας

1. i) 1 ii) 1.
2. i) συνεχής ii) συνεχής iii) συνεχής.
3. i) Μη συνεχής στο –1. ii) Μη συνεχής στο 2.
   iii) Μη συνεχής στο 1. iv) Συνεχής.
4. i) Μη συνεχής στο 1 ii) συνεχής.
5. Είναι όλες συνεχείς ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
6. Για τη συνάρτηση $f(x) = ημx - x + 1$ να εφαρμόσετε το Θεώρημα του Bolzano στο $[0, \pi]$.
7. i) $\alpha = 0$ ii) $\alpha = -1$ iii) $\alpha = 1$ iv) $\alpha = 1$.
8. Να εφαρμόσετε διαδοχικά το Θεώρημα του Bolzano στα $[\lambda, \mu]$ και $[\mu, \nu]$.
9. Εργαστείτε όπως στο σχόλιο του Θεωρήματος Bolzano.
10. i) $[-1, 0]$ ii) $(0, 2)$ iii) $[1, 2)$ iv) $(1, 2]$.

§ 1.8 Β' Ομάδας

1. κ = –1.

2. (α = 4, β = 1) ή (α = – 3, β = 8).

3. i) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

   ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1, \ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=1$, οπότε

   $g(0)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1.$

4. Εφαρμόσετε Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση Φ(x) = f(x) – g(x) στο [0, 1].

5. α) Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση

   $f(x) = (x - 2)(x^4 + 1) + (x^6 + 1)(x - 1)$ στο [1, 2].

   β) Όμοια για τη συνάρτηση

   $f(x) = e^x (x - 2) + (x - 1)\ln x.$

6. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = g(x) στο $(0, +\infty)$ έχει μια ακριβώς λύση.

   ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = g(x) στο $(0, +\infty)$ έχει μια ακριβώς λύση.

7. i) α) x = 1 ή –1

   β) Η συνάρτηση f στο (–1, 1) δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής.

   γ) $f(x)=\sqrt{1-x^2} \quad x\in[-1,1]$ ή $f(x)=-\sqrt{1-x^2} \quad x\in[-1,1]$

ii) α) $x = 0$

β) η f στο $(-\infty, 0)$ συνεχής και δεν μηδενίζεται. Ομοίως και στο $(0,+\infty)$

γ) $f(x) = x$ ή $f(x) = -x$ ή $f(x) = |x|$ ή $f(x) = -|x|$.

8. i) ΟΒ: $y = x$, ΑΓ: $y = -x + 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f(x) - x = 0$ και $f(x) + x - 1 = 0$ στο $[0, 1]$ έχουν κάποια λύση.

9. i) $d = d(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2}$, $x \in [\alpha, \beta]$.

ii) Να εφαρμόσετε το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για την d στο $[\alpha, \beta]$.

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

§ 2.1 Α' Ομάδας

1. i) 0 ii) -2 iii) 0

2. i) 0 ii) Δεν παραγωγίζεται iii) 1 iv) 1

3. $g'(0) = f(0)$.

4. i) Δεν είναι συνεχής στο 0 και άρα δεν παραγωγίζεται

ii) Δεν παραγωγίζεται στο 1.

5. Από την άσκηση 1

i) $y = 1$ ii) $y = -2x + 3$ iii) $y = 0$.

Από την άσκηση 2

i) $y = 0$ ii) Δεν ορίζεται iii) $y = x + 1$

iv) $y = x + 1$.

§ 2.1 B' Ομάδας

1. $f'(0) = -1$.

2. $f'(1) = 3$.

3. $f'(0) = 1$.

4. $f'(0) = \frac{1}{2}$.

5. Με κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε ότι $f'(0) = 1$.

6. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, οπότε $f(0) = 0$ και με κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε $f'(0) = 1$.

7. i) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, οπότε $f(0) = 0$.

8. i) Είναι

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = -\frac{f(x_0 + (-h)) - f(x_0)}{-h} \text{ κ.τ.λ.}$$

ii) Είναι

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f(x_0-h)+f(x_0)}{h}, \text{ κ.τ.λ.}$$

9. i) το Β. ii) το Γ.

iii) $t=2$ αλλάζει το Β, $t=4$ το Α και $t=5$ το Β

iv) το Α v) το Β vi) το Α.

§ 2.2 Α' Ομάδας

1. i) -4 ii) $\frac{1}{6}$ iii) $-\frac{1}{2}$ iv) $\frac{1}{e}$ v) 2.

2. i) Δεν παραγωγίζεται στο 1.

ii) $f'(x)=\begin{cases} \sigma\upsilon\nu x, & x<0 \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$.

iii) Δεν παραγωγίζεται στο 2.

iv) Δεν παραγωγίζεται στο $\frac{2}{3}$.

3. $f'(x_1)=f'(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$ άτοπο αφού $x_1\neq x_2$, ενώ για την $f(x) = x^3$ υπάρχουν τα (x_1,x_1^3), $(-x_1,-x_1^3)$.

4. $f'(x)=\begin{cases} 1, & x\in(-2,0) \\ -2, & x\in(0,2) \\ 0, & x\in(2,4) \\ 4, & x\in(4,6) \\ -\frac{4}{3}, & x\in(6,9) \end{cases}$.

5. Ευθ. τμήμα με κλίση 2 για $x\in[0,2]$, ευθύγραμμο τμήμα με κλίση -1, για $x\in[2,4]$ και ευθ. τμήμα με κλίση 1 για $x\in[4,8]$.

§ 2.2 Β' Ομάδας

1. $\alpha = -1$, $\beta = \pi$.

2. Η εξίσ. εφαπτ. της C_f στο $(\xi, f(\xi))$ είναι $y=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}x+\frac{\sqrt{\xi}}{2}$ η οποία διέρχεται από το $B(-\xi, 0)$.

3. $N(-2\alpha, -8\alpha^3)$ και $f'(-2\alpha) = 4f'(\alpha)$.

4. i) Είναι $A(2\xi, 0)$, $B\left(0,\frac{2}{\xi}\right)$ και $M\left(\xi,\frac{1}{\xi}\right)$. ii) 2.

§ 2.3 Α' Ομάδας

1. i) $f'(x)=7x^6-4x^3+6$ ii) $f'(x)=6x^2+\dfrac{1}{x}$

   iii) $f'(x)=x^3-x^2+x-1$ iv) $f'(x)=-\eta\mu x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

2. i) $f'(x)=3x^2-6x-1$.   ii) $f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

   iii) $f'(x)=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$.   iv) $f'(x)=\dfrac{1-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$.

   v) $f'(x)=x(\eta\mu 2x+x\sigma\upsilon\nu 2x)$.

3. i) $f'(x)=\dfrac{e^x\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}$.   ii) $f'(x)=\dfrac{-4\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 2x}$.

   iii) $f'(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}$.   iv) $f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.

4. i) $f'(x)=\begin{cases}4x+3, & x<0\\ 6\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right) & x>0,\end{cases}$

   ενώ δεν παραγωγίζεται στο 0.

   ii) $f'(x)=\begin{cases}2x+\sigma\upsilon\nu x, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$.

5. i) $(-2, -4)$ και $(2, 4)$. ii) $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

iii) $(-1, -2)$, $(1, 2)$.

6. $f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ και

$g'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$, $x \in [0, +\infty) - \{1\}$.

Οι συναρτήσεις f', g' δεν είναι ίσες αφού δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

7. $f'(1)g'(1) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

8. $\alpha = 2$.

9. i) $(-2, 3)$ και $(2, 7)$.

ii) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-10\sqrt{3}+45}{9}\right)$ και $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{10\sqrt{3}+45}{9}\right)$.

10. $y = 2x - 1$ και $y = -2x - 1$.

11. $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$.

12. i) $f'(x) = \frac{-24(x+1)}{x^7(3x+4)^3}$. ii) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$, $x \in (1, +\infty)$.

iii) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

iv) $f'(x)=\frac{-(1+x^2)}{x(1-x^2)}$.

v) $f'(x)=e^{-x^2}(-2x)$.

13. i) $f'(2)=20$.

ii) $f'(4)=\frac{5}{6}$.

iii) $f'\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{6+\sqrt{3}\pi}{48}\right)$.

iv) $f'(3)=5$.

14. i) $f'(x)=x^{\ln x}2\ln x\frac{1}{x}$.

ii) $f'(x)=2^{5x-3}\cdot 5\ln 2$.

iii) $f'(x)=(\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right)$.

iv) $f'(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}\left(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x\right)$.

15. $f'(x)=\eta\mu 2x$ και

$f''(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x$, οπότε ισχύει η ισότητα.

§ 2.3 B' Ομάδας

1. Το κοινό σημείο είναι το (1, 1) και ισχύει $f'(1)\cdot g'(1)=-1$.

2. Τα κοινά σημεία είναι (1, 1) και (–2, –8).
Η $y = 3x - 2$ εφάπτεται στο (1, 1).

3. $\alpha = 0$, $\beta = -1$.

4. Η $y = x + 1$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $(-1, 0)$.

5. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 4$.

6. Έστω ότι υπάρχει το $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και καταλήγουμε σε αδύνατο σύστημα.

7. i) Προσθέτουμε και αφαιρούμε στον αριθμητή την ποσότητα $xf(\alpha)$.

ii) Προσθέτουμε και αφαιρούμε στον αριθμητή την ποσότητα $e^x f(\alpha)$. Να λάβετε υπόψιν ότι το $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{e^x - e^\alpha}{x - \alpha}$ είναι η παράγωγος της $h(x) = e^x$ στο α.

8. $\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{13\pi}{8}$.

9. i) $f'(x) = \dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$, $x \neq 0$ και δεν παραγωγίζεται στο 0. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο (0, 0) είναι η $x = 0$.

ii) $f'(x)=\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x\neq 0$ και $f'(0)=0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο (0, 0) είναι η y = 0.

10. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A(1, f(1)) είναι η y = x − 1 + f(1) που εφάπτεται της C_g στο (0, g(0)).

11. i) $f'(0)=1$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η y = x + 1 που σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

§ 2.4 Α' Ομάδας

1. $E'(1)=-48\pi\ cm^2/s$

   $V'(1)=-72\pi\ cm^3/s$

2. $\dfrac{25}{81\pi}$ cm/s.

3. $x\in\left(20-\sqrt{220},20+\sqrt{220}\right)$.

4. i) $x(t)=15t$, $y(t)=20t$. ii) $d'(t)=25$ km/h.

5. (2, 1).

§ 2.4 Β' Ομάδας

1. $425\ cm^3 / s$.

2. $(2\ln5+2)\ cm^2 / s$.

3. 0,75 m/s.

4. 0,25 rad/min.

5. 0,2 m/s.

6. $2\,\dfrac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$.

7. i) $-\dfrac{1}{25}$ rad/sec. ii) $-\dfrac{\sqrt{2,75}}{25}$ m/s.

8. $3\sqrt{3}$ m/s.

§ 2.5 Α' Ομάδας

1. i) 1 ii) $\dfrac{\pi}{6}$ ή $\dfrac{\pi}{2}$ iii) $\dfrac{\pi}{2}$ iv) δεν ισχύει.

2. i) 2 ii) $\dfrac{\pi}{4}$ iii) $\xi\in(-3,-1)$ και $\xi=1$.

3. Έχουμε $g'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}$ και

$0<\alpha<x_0<\beta$ οπότε $\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{1}{x_0}<\dfrac{1}{\alpha}$.

§ 2.5 Β' Ομάδας

1. i) Θ. Bolzano στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.

   ii) Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες της f στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$.

2. i) Θ. Rolle στο $[0, 1]$.

   ii) $\varepsilon\varphi x = 1 - x \Leftrightarrow f'(x) = 0$ που έχει ρίζα στο $(0, 1)$.

3. i) Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει 2 ρίζες x_1, x_2 και εφαρμόζουμε Θ. Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x \in [x_1, x_2]$.

   ii) Εφαρμογή του ερωτήματος i) με $f(x) = \eta\mu\dfrac{x}{2}$.

4. i) $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 \geq 0$. ii) Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$.

5. Θ.Μ.Τ. στο $[0, 4]$.

6. Δείξτε ότι $f(0) \leq 0$ και $f(0) \geq 0$.

7. Υποθέτουμε ότι έχουν τρία κοινά σημεία με τετμημένες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ και εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$.

§ 2.6 Α' Ομάδας

1. $\varphi'(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$, οπότε $\varphi(x) = c$.

2. i) Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

   ii) Γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 2]$.

   iii) Γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1,+\infty)$.

4 i) Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

   ii) Γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

   iii) Γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και σταθερή με τιμή μηδέν στο $[\pi, 2\pi]$.

5. i) $f'(x) = 5(x^4+1) > 0$ και $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 > 0,\ \ x \in (0,+\infty)$.

   ii) Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, ενώ η g το διάστημα $(-3,+\infty)$.

iii) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών των συναρτήσεων και είναι γνησίως αύξουσες.

6. i) $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{1+x} > 0$.

ii) f(0) = 0 και η f γνησίως αύξουσα.

§ 2.6 Β' Ομάδας

1. Με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής βρίσκουμε ότι $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. i) $f'(x) = 3(x^2 - 1) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

ii) [α – 2, α + 2]

iii) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και είναι γνησίως φθίνουσα στο (–1, 1).

3. i) t = 1 ή t = 4.

ii) Αριστερά όταν $t \in (0, 4)$ και δεξιά όταν $t \in (4, 5)$.

iii) Η ταχύτητα αυξάνεται στα διαστήματα [0, 1] και [3, 5] και μειώνεται στο διάστημα (1, 3).

4. $V'(t) = -\dfrac{100t}{(t+2)^3} < 0$

$\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = 25$ και το σύνολο τιμών της V είναι το (25, 50].

5. i) $f'(x)=\dfrac{(x^2+3)^2}{(x^2-1)^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

ii) Όταν x ανήκει σε καθένα των διαστημάτων $(-\infty,-1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,+\infty)$ η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ και επειδή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $f(x)=\alpha$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, έχει 3 ρίζες.

6. $\alpha\geq 3$.

7. i) $f'(x)=x\eta\mu x>0,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ii) Ισχύει $f(x)>f(0),\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ αφού f γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

iii) $f'(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\cdot x-\eta\mu x}{x^2}<0$ λόγω του ερωτήματος ii).

8. i) $f'(x)=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$ για $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ii) Επειδή $f(0)=0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, ισχύει $f(x)\geq f(0)$.

§ 2.7 Α' Ομάδας

1. Στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο και στο $x = 3$ τοπικό ελάχιστο .

2. α) i) Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

   ii) Τοπικό μέγιστο το $g(-1) = 4$ και τοπικό ελάχιστο το $g(1) = 0$.

   iii) Τοπικό μέγιστο το $h(0) = -1$ και τοπικό ελάχιστο το $h(1) = -2$.

β) i) Μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ ως συνεχής και γνησίως αύξουσα.

   ii) Μια ρίζα στο $(-\infty, -1]$, μια στο $[-1, 1]$ και μια στο $[1,+\infty)$.

   iii) Μια ρίζα στο $[1,+\infty)$.

3. i) Το $f(0) = 0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(1) = 1$ τοπικό μέγιστο.

   ii) Ελάχιστο το $g(2) = -1$.

4. i) Ελάχιστο το $f(0) = 1$.

   ii) Ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

5. $\alpha = 1$, $\beta = 0$, τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 3$ και τοπικό ελάχιστο $f(1) = -1$.

6. Είναι $p(x)=2\left(x+\frac{400}{x}\right)$, $x > 0$ και ελάχιστο το $p(20) = 80$.

7. Είναι $E(x)=-x^2+40x,\ x\in(0,40)$ και μέγιστο το $E(20) = 400$.

8. $\frac{4}{3}$ mgr.

9. i) $(EZ)^2=2x^2-4x+4$. ii) 1.

10. 30 μονάδες.

§ 2.7 Β' Ομάδας

1. i) Γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

   ii) Μια ακριβώς ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

2. i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

   ii) Γνησίως φθίνουσα στο (0, 1] και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Ελάχιστο το $\varphi(1) = 0$.

   iii) Κοινό σημείο (1, 0), κοινή εφαπτομένη την $y= x - 1$.

3. i) α) Η $f(x) = e^x - x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε $f(x) > f(0)$.

β) Η $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ii) α) Αν $f(x) = \text{συν}x - 1 + \frac{1}{2}x^2$, τότε $f''(x) = -\text{συν}x + 1$ οπότε η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα $f'(x) > f'(0)$, οπότε και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) βρίσκουμε ότι η $g(x) = \text{ημ}x + \frac{1}{6}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

iii) α) Αν $f(x) = (1+x)^\nu - 1 - \nu x$, $x \geq 0$ τότε $f'(x) = \nu[(1+x)^{\nu-1} - 1] > 0$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = (1+x)^\nu - 1 - \nu x - \frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

4. Η $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

5. Θεωρούμε την h(x) = f(x) – g(x), οπότε $f'(\xi) = g'(\xi)$ με $\xi \in (x_1, x_2)$.

6. Είναι $f'(\alpha) = f'(\beta) = f'(\gamma) = 0$ και Θ. Rolle στα διαστήματα [α, β] και [β, γ].

7. ii) $x = \frac{4}{11}(9 - 4\sqrt{3}) \cong 0{,}75\,m$.

8. i) $(MA)^2 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + x$ και M(4, 2). ii) $\lambda_{\varepsilon\varphi} \cdot \lambda_{AM} = -1$.

9. $\frac{200}{\pi}$ και 100.

10. Οι εισπράξεις είναι

$E(x) = x(1500 - 5x)$.

$E'(x) = 0$, οπότε $x = 150$.

11. i) $t = 200\,s$ ii) $t \cong 55{,}6\,s$.

12. i) $E = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot HB$, όπου HB ύψος τραπεζίου.

Είναι HB = 2ημθ και HΓ = 2συνθ.

ii) $\theta = \frac{\pi}{3}$.

13. ii) 75.

14. Η πυκνότητα του καπνού είναι

$r = r_1 + r_2 \quad k\frac{p}{x^2} + k \cdot \frac{8p}{(12 - x)^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Σε 4 km από το εργοστάσιο E_1.

§ 2.8 Α' Ομάδας

1. i) Κοίλη στο $(-\infty,1]$, κυρτή στο $[1,+\infty)$ και το $(1, 0)$ σημείο καμπής.

   ii) Κοίλη στα $(-\infty,-2]$, $(0, 2]$, κυρτή στα $[-2, 0)$ και $[2,+\infty)$, ενώ τα σημεία καμπής είναι $\left(-2,-\frac{5}{4}\right)$ και $\left(2,\frac{5}{4}\right)$.

2. i) Κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$, ενώ το $\left(2,\frac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής.

   ii) Κοίλη στο $(0, e]$, κυρτή στο $[e,+\infty)$, ενώ το $(e, -3e^2)$ είναι σημείο καμπής.

   iii) Κοίλη στο $(-\infty,0]$, $[1,+\infty)$, κυρτή στο $[0, 1]$, και τα $(0, 1)$, $(1, 3)$ σημεία καμπής.

3. i) Κυρτή στα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$, κοίλη στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και τα $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$ σημεία καμπής.

ii) Κοίλη στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ και κυρτή στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, ενώ το (0, 0) είναι σημείο καμπής.

iii) Κοίλη στο $(-\infty,0]$, κυρτή στο $[0,+\infty)$ και το (0, 0) σημείο καμπής.

iv) Κοίλη στο $(-\infty,0]$, κυρτή στο $[0,+\infty)$ και το (0, 0) είναι σημείο καμπής.

v) Κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$ και το (0, 0) σημείο καμπής.

4. • - γνησίως αύξουσα στα [−1, 1], [4, 8].
   - γνησίως φθίνουσα στα [1, 4], [8, 10].
 • - κοίλη στα [0, 2], [5, 6] και [7, 10].
   - κυρτή στα [−1, 0], [2, 5] και [6, 7].
 • - Τα 1, 8 είναι θέσεις τοπικών μεγίστων.
   - Τα −1, 4, 10 είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων.
 • - Τα 0, 2, 5, 6, 7 είναι θέσεις σημείων καμπής.

5. i) Όταν $t \in [0,t_2]$ κινείται αριστερά και όταν $t \in [t_2,+\infty)$ δεξιά.

ii) Η ταχύτητα αυξάνεται στο διάστημα $[t_1,t_3]$ και μειώνεται σε καθένα από τα διαστήματα $[0,t_1]$ και $[t_3,+\infty)$.

§ 2.8 Β' Ομάδας

1. $A\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0,\ 0)$ και $\Gamma\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

   Τα Α, Γ έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

2. $(\alpha,\ 2-\alpha^2)$.

3. $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

4. i) Τοπικό μέγιστο το $f(0)=2$, τοπικό ελάχιστο το $f(2)=-2$ και σημείο καμπής το $(1,\ 0)$.

   ii) $\lambda_{AB}=\lambda_{A\Gamma}=-2$.

5. Η f'' δεν μηδενίζεται στο $(-2,\ 2)$.

§ 2.9 Α' Ομάδας

1. i) $x=2$. ii) $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

   iii) δεν υπάρχουν iv) $x=0$.

2. i) $y=1$. ii) $y=0$ στο $+\infty$.

3. i) $y=x$, $x=1$. ii) $y=x+2$, $x=2$.

   iii) $y=x+\frac{1}{2}$ στο $+\infty$ και $y=-x-\frac{1}{2}$ στο $-\infty$.

4. i) 1. ii) $\frac{1}{2}$. iii) 0.

§ 2.9 Β' Ομάδας

1. i) $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x-1))=0$,

   $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=0$.

   ii) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και άρα βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$.

2. i) $y = 0$. ii) $y = 0$.

3. $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

4. Χρησιμοποιείστε τους κανόνες de L' Hospital.

5. Χρησιμοποιείστε τους κανόνες de L' Hospital.

6. i) 1, 0. iii) $x = 0$.

§ 2.10 Α' Ομάδας

1. i) Είναι $f'(x)=3(x^2-2x+3)$, $f''(x)=6x-6$ και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

   ii) $f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{4}{(x-1)^3}$, ασύμπτωτες

   $y = 1$, $x = 1$ και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

2. i) $f'(x)=\frac{x^2-1}{x}$, $f''(x)=\frac{2}{x^3}$, ασύμπτωτες $x=0$ και y = x και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

ii) Ομοίως.

3. $f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x)=-\eta\mu x$ και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f στο [–π, π].

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Γ' Ομάδας

1. i) $f'(1)=g'(1)$.

ii) Να πάρετε τη διαφορά φ(x) = g(x) – f(x) και να εξετάσετε το πρόσημό της.

2. Να πάρετε τη συνάρτηση φ(x) = f(x) – g(x).

3. $E'(\theta)=\sigma\upsilon\nu 2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta$. Μέγιστο το $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4. Το εμβαδόν του τομέα είναι $E=\frac{1}{2}r^2\theta$ ή $E(r)=10r-r^2$.

Μέγιστο το $E(5) = 25$.

5. iii) $\theta=\frac{\pi}{4}$ και το μήκος της σκάλας είναι $2\sqrt{2}\cong 2{,}8$ m.

6. i) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$ και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

ii) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$, οπότε

$f(\alpha)>f(\alpha+1)\Leftrightarrow \alpha^{\alpha+1}>(\alpha+1)^{\alpha}$

iii) Να λογαριθμήσετε την ισότητα $2^x=x^2$
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,e]$, οπότε παίρνει την τιμή $x = 2$ μια φορά. Ομοίως στο $[e,+\infty)$ παίρνει την τιμή $x = 4$ μια φορά.

7. i) Να πάρετε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha^x+\beta^x$ και να εφαρμόσετε το θεώρημα του Fermat.

ii) Να πάρετε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x-1$ και να εφαρμόσετε το Θ. Fermat.

8. i) $f''(x)=e^x>0$, $g''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$.

ii) $y = x + 1$ και $y = x - 1$.

iii) η f είναι κυρτή, ενώ η g είναι κοίλη.

iv) Να πάρετε τη διαφορά $f(x)-g(x)$.

9. i) $\lambda(1-\ln\lambda)$. ii) $\lambda = e$

iii) Θεωρείστε τη διαφορά $g(x)-\lambda x$ που είναι η $f(x)$.

10. i) $f'(0)=0$ ii) $x=\dfrac{1}{\kappa\pi},\ \kappa\in\mathbb{Z}^*$.

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$.

11. A. i) $\psi'(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$, οπότε $\psi(x)=c$

ii) $\varphi'(x)=0$ και $\varphi(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

B. ii) Να λάβετε υπόψιν το ερώτημα Α.

12. i) $\det(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN})=0$.

ii) Να εφαρμόσετε τους κανόνες de L' Hospital.

13. A. i) Αν ΟΔ το ύψος του τριγώνου ΟΠΑ, τότε $\eta\mu\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\ell}{4}$

ii) $S = \upsilon t$, οπότε $S = 4t$

B. $\ell'(t) = 4\sigma\upsilon\nu t$.

α) 2 km/h β) 0 km/h γ) -2 km/h.

14. Συνολικό κόστος $K(x)=600+\dfrac{1000}{x}+10(x+1)$.

Πρέπει να προσλάβει 10 εργάτες.

3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

§ 3.1 Α' Ομάδας

1. i) $\frac{x^4}{4} - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c$ ii) $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + c$

iii) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$ iv) $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + c$

v) $e^x - 3\ln|x| + \frac{1}{2}\eta\mu 2x + c$ vi) $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x + c$

vii) $x + \ln|x+2| + c$.

2. $f(x) = 2\sqrt{x} - 5$.

3. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4$

4. $f(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$.

5. 19 εκατ.

6. $K(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 100$.

7. 352 χιλ.

§ 3.1 Β' Ομάδας

1. $T(t) = \alpha e^{-kt} + T_0$

2. 9.976 ευρώ.

3. 814,4 ευρώ.

4. $f'(x) = g'(x) + c_1$ κ.τ.λ.

§ 3.2 Α' Ομάδας

1. i) $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$ ii) $\frac{1}{4}e^{2x}(6x^2 - 10x + 7) + c$

iii) $\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + c$

iv) $\left(-x^2 + \frac{1}{2}\right)$ συν2x + xημ2x + c

v) 2xημ2x + συν2x + c vi) $x \ln x - x + c$

vii) $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$ viii) $\frac{1}{5}e^{x}(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) + c$

ix) $\frac{1}{2}e^{x}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c$.

2. i) $-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x+c$ ii) $\frac{1}{32}(4x^2-16x+7)^4+c$

iii) $\frac{-1}{6(x^2+6x)^3}+c$ iv) $\frac{2}{3}(2+x^3)^{\frac{1}{2}}+c$

v) $\frac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}(3x-2)+c.$

3. i) $-\sigma\upsilon\nu e^x+c$ ii) $\ln(e^x+1)+c$ iii) $2\sqrt{\ln x}+c$

iv) $\ln(\ln(e^x+1))+c$ v) $\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+c.$

§ 3.2 B' Ομάδας

1. i) $-\ln(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)+c$ ii) $-\frac{1}{2}[\ln(\sigma\upsilon\nu x)]^2+c$

iii) $e^{\eta\mu x}+c.$

2. i) $-\frac{2}{9}\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)^{\frac{3}{2}}+c$ ii) $\sqrt{x^2+1}+c$

iii) $\frac{1}{2}(x^2+1)[\ln(x^2+1)-1]+c.$

3. i) $\frac{x^3}{3}(\ln x^2-\frac{2}{3})+c$ ii) $t(\ln t)^2-2t\ln t+2t+c$

iii) $e^x ημe^x + συνe^x + c$.

4. i) $-\ln|συνx| + c$ και $xεφx + \ln|συνx| + c$

ii) $-\dfrac{1}{ημx} + c$ και $-σφx - \dfrac{1}{ημx} + c$

iii) $\dfrac{συν^3x}{3} - συνx + c$ και $ημx - \dfrac{ημ^3x}{3} + c$.

5. i) $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}ημ2x + c$ ii) $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}ημ2x + c$

iii) $\dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{32}ημ4x + c$.

6. i) $\dfrac{1}{2}συνx - \dfrac{1}{6}συν3x + c$ ii) $\dfrac{1}{4}ημ2x + \dfrac{1}{16}ημ8x + c$

iii) $\dfrac{1}{4}ημ2x - \dfrac{1}{12}ημ6x + c$.

7. i) $\ln|x^2 - 3x + 2| + c$ ii) $-5\ln|x-1| + 8\ln|x-2| + c$

iii) $\dfrac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+1| + 4\ln|x+2| + c$ iv) $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + c$.

§ 3.3 Α' Ομάδας

1. i) $y=\dfrac{1}{2x^2+c}$ ii) $y^2-x^2=c$ iii) $y=ce^{x^2}$

   iv) y = ln(ημx + c).

2. i) $y=-\dfrac{3}{2}+ce^{2x}$ ii) $y=e^{-x}+ce^{-2x}$

   iii) $y=2x+ce^{-x}+2$ iv) $y=ce^{-x^2}+\dfrac{1}{2}$.

3. $y=\dfrac{-3}{2x^2+1}$

4. $y=\dfrac{2}{3}$.

5. i) $y=1-\dfrac{4}{e^{εφx}}$ ii) $y=\dfrac{x\ln x-x+21}{x+1}$.

§ 3.3 Β' Ομάδας

1. $I(t)=\dfrac{1}{2}(ημt-συνt)+\dfrac{1}{2}e^{-t}$.

2. $y^2=2x$.

3. $y=x^2+cx$.

4. $y = e^{\frac{x^2}{2}}$.

5. $y(t) = \dfrac{\beta}{\alpha - \lambda} \cdot \dfrac{1}{e^{\lambda t}} + \dfrac{c}{e^{\alpha t}}$.

6. $\partial(t) = T + (\partial_0 - T)e^{-\kappa t}$.

7. ii) $P(t) = \dfrac{m}{\kappa} + \left(p_0 - \dfrac{m}{\kappa}\right)e^{\kappa t}$, $\kappa > 0$.

8. i) $\dfrac{dV}{dt} = 100\pi y'$ ii) $y(t) = \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{100}t + 6\right)^2$

iii) $t = 120\sqrt{5}$ sec.

9. $E(t) = E_0 e^{\frac{t - t_1}{Rc}}$.

10. i) α) $I(t) = 5 + \dfrac{c}{e^{3t}}$, β) 5

ii) $I(t) = \dfrac{5}{4}(\eta\mu 3t - \sigma\upsilon\nu 3t) + \dfrac{c}{e^{3t}}$.

§ 3.4 Α' Ομάδας

1. i) -11 ii) 4 iii) -2 iv) 15.

2. $\ln\dfrac{1}{t} = \ln 1 - \ln t$.

3. $\kappa = 4$.

4. i) 22 ii) -12

§ 3.5 Α' Ομάδας

1. i) 6 ii) $3-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ iii) -1 iv) $\dfrac{29}{6}$.

2. Εφαρμόζουμε ιδιότητες.

4. 1

5. i) $-\eta\mu x\cdot|\eta\mu x|$ ii) $-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{2x}$

6. i) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ii) χρησιμοποιείστε το (i).

§ 3.5 Β' Ομάδας

1. 10.

2. $f'(x) = 0$.

3. Τοπ. ελάχιστο το $f(2) = 0$.

4. $\int_0^x f(t)dt + xf(x)$.

5. $F(x) = 0,\ x \in (0,+\infty)$.

6. De l’ Hospital.

7. i) $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ ii) $-\sigma\upsilon\nu 1$.

8. i) $\frac{5}{3}$ ii) $2-\frac{\pi^2}{2}$ iii) $\frac{11}{6}$.

9. i) 4 ii) $\frac{e-2}{e}$

iii) $5\ln 10-\frac{9}{2}\ln 9-\frac{1}{2}$, iv) $-\frac{1}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$.

10. $\frac{\pi^2}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$, $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$.

11. $f(0)=1$.

12. κατά παράγοντες.

§ 3.6 Α' Ομάδας

1. $\overline{f}=1$.

3. $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

§ 3.6 Β' Ομάδας

1. $\overline{f}=\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}$, $\overline{g}=\dfrac{1}{\alpha\beta}$.

2. α) $\dfrac{PR^2}{6n\ell}$ β) $\upsilon_{\mu\varepsilon\gamma}=\dfrac{PR^2}{4n\ell}$.

§ 3.7 Α' Ομάδας

1. $\dfrac{14}{3}$ τ.μ.

2. i) $\dfrac{3^5}{4}$ τ.μ. ii) $\sqrt{3}$ τ.μ.

3. $\dfrac{9}{2}$ τ.μ.

4. $\dfrac{37}{12}$ τ.μ.

5. $\dfrac{125}{6}$ τ.μ.

§ 3.7 Β' Ομάδας

1. $y = 6x - 3$, $E=\dfrac{1}{4}$ τ.μ.

2. $4+\frac{8}{3}\sqrt{2}$ τ.μ.

3. $\frac{11}{12}$ τ.μ.

4. $\frac{1}{6}$ τ.μ.

5. i) $1 + e(\ln\lambda - 1)$ ii) $+\infty$.

6. $\frac{2}{\ln 3}+\frac{3}{2}$ τ.μ.

7. $\frac{7}{4}$ τ.μ.

8. i) $y = x$, $y = -x+\pi$ ii) $\frac{\pi^2}{4}-2$.

9. α) $\frac{1}{3}$ τ.μ. β) $x=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$.

10. $\frac{1}{2}$.

11. i) $f(x)=x^2-3x+2$ ii) $\frac{1}{6}$ τ.μ.

12. i) $y = -2x + 2$, $y = 2x - 6$

ii) $E_1=\frac{4}{3}$, $E_2=\frac{2}{3}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Γ' Ομάδας

1. ii) $\frac{\pi}{4}\ln 3$.

2. i) $-\ln\sqrt{3}$ ii) $\ln\sqrt{3}$.

3. $\ln|u+1|-\ln|u+2|+c$

   i) $\ln|\eta\mu x+1|-\ln|\eta\mu x+2|+c$

   ii) $\ln(e^x+1)-\ln(e^x+2)+c$.

4. i) $\frac{1}{2\nu+2}$ ii) $\frac{1}{2}\ln 2$, $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$, $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$.

5. Τα μέλη της ισότητας έχουν ίσες παραγώγους.

6. i) $D_f=[1,+\infty)$ $D_F=[1,+\infty)$.

7. i) $F(x)+G(x)=e^x-1$,

   $$F(x)-G(x)=\frac{e^x}{5}(\sigma\upsilon\nu 2x+2\eta\mu 2x)-\frac{1}{5}$$

   ii) $I=\frac{3}{5}e^{\pi}(e^{\pi}-1)$, $J=\frac{2}{5}e^{\pi}(e^{\pi}-1)$.

8. $\alpha=\sqrt[3]{4}$.

9. i) $0 < \lambda < 1$, $E(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - 1$, $\lambda > 1$, $E(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

ii) $\lambda = 2$ iii) $+\infty$ και 1.

10. i) $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x) - g(x))dx \geq 0$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β΄ ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)